

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

Dinâmica de Sistemas Esferoidais

Fabricio Ferrari

fabricio@ferrari.pro.br

Bagé
2010

Capítulo 1

Introdução

A dinâmica de sistemas esferoidas é a disciplina que se ocupa dos objetos cuja distribuição de matéria é esférica, elipsoidal ou afim. Tais objetos apresentam-se com diversos graus de simetria, seja total (esférico), axial (oblatos e prolatos), ou sem simetria (triaxiais). Neste categoria de objetos incluem-se as galáxias elípticas e lenticulares, aglomerados globulares e bojo de galáxias espirais. A importância da dinâmica de sistemas esferoidas reside no fato de aplicar-se a todos estes tipos de objetos astronômicos.

De maneira geral, a análise de tais sistemas baseia-se em diferentes abordagens, dependendo da informação que se dispõe e da que se quer obter. Aqui pretende-se discutir o formalismo das principais linhas de tratamento dos problemas que envolvem dinâmicas de esferóides.

A primeira análise baseia-se na teoria Potencial, um panorama recorrente no qual a matéria é a fonte do campo gravitacional (equação de Poisson), que por sua vez coordena o movimento da própria matéria (equações de movimento). Nesta análise, a importância recai em que distribuição de matéria é usada, já que um único perfil não reproduz as características de todos os tipos de esferóides. Desta forma, são apresentados vários perfis de matéria e suas propriedades, como potencial, velocidades e escalas características, energia potencial.

Na segunda parte, introduz-se a teoria de órbitas, que estuda as equações de movimento e as consequências da forma do potencial nas famílias de órbitas permitidas e nas suas características, como períodos orbitais, constantes e integrais de movimento, comportamento no espaço de fases.

Em seguida, o estudo da evolução dinâmica destes sistemas é feita a partir da equação que descreve a evolução da função de distribuição no espaço de fases (equação de Boltzmann) e dos primeiros momentos desta equação (equações de Jeans). Utilizando-se a função de distribuição, perde-se a informação individual sobre a evolução de cada estrela em favor de uma descrição global

do desenvolvimento do sistema no espaço de fases. Por outro lado, a equação do Virial em forma tensorial relaciona a variação temporal da distribuição de matéria do esferóide com a energia cinética e potencial. É desta forma que podemos avaliar se um modelo de esferóides está ou não em condição de equilíbrio.

Por fim, além de averiguar quais sistemas estão em equilíbrio, é importante saber como tal configuração se comporta frente a perturbações. A estabilidade dos sistemas esferoidais fluidos e estelares é analisada através da equação de Jeans. Para sistemas esféricos, empregam-se os critérios de estabilidade de Chandrasekhar, Antonov-Leibovitz e Eddington. Nos casos de sistemas estelares, as quatro leis de Antonov nos fornecem parâmetros para qualificar a estabilidade de tais sistemas.

A partir destas diferentes abordagens, são estudadas as características da evolução dinâmica dos sistemas esferoidais. Assim, alguns fenômenos podem ser melhor entendidos, como a evaporação e ejeção de estrelas, o colapso do centro em alguns sistemas, a equipartição de energia, a importância das estrelas binárias, o efeito do atrito dinâmico e as consequências da catástrofe gravotérmica.

Com base nos elementos descritos acima, pormenorizados no roteiro que segue, pretendo apresentar um panorama reduzido do estudo dinâmico dos sistemas esferoidais.

1.1 Roteiro

1. Teoria Potencial

- Preliminares
- Resultados Gerais
- Teoremas de Newton
- Perfis de matéria:
 - massa pontual, esfera homogênea, esfera isotérmica, esfera lei de potência, esfera de Hubble, esfera de Hernquist, esfera de Plummer, esfera de Jaffe, esfera de Sersic, esfera de Navarro-Frank-White, modelos de Dehen.
- Características dos variados perfis de matéria:
 - Potencial
 - Velocidades de escape e circular
 - Massa total e acumulada

- Raio de meia massa
- Energia Potencial
- Sistemas Elipsoidais: simetria axial e triaxial.
- Tensor energia potencial
- A inversão de Abel

2. Introdução à Teoria de Órbitas

- Potenciais esféricos estáticos
- Potencial do oscilador harmônico e de Kepler
- Órbitas em potenciais com simetria axial

3. Equilíbrio de Sistemas Sem Colisões

- Tempo de relaxação
- A função de distribuição e a equação de Boltzmann
- As equações de Jeans
- As equações do Virial
- Os teoremas de Jeans e os sistemas esféroidais

4. Estabilidade de Sistemas Sem Colisões

- A instabilidade de Jeans num fluido
- A instabilidade de Jeans num sistema estelar
- A estabilidade de sistemas esféricos
 - O princípio variacional de Chandrasekhar
 - O teorema de Antonov-Lebovitz
 - O princípio variacional de Eddington
- Estabilidade de sistemas estelares
 - O princípio variacional de Antonov
 - As 4 leis de Antonov

5. Evolução de Sistemas Estelares Esféricos

- Evaporação e ejeção
- Colapso do centro
- Equipartição

- Estrelas binárias
- Atrito Dinâmico
- Catastrofe gravotérmica.

Capítulo 2

Teoria Potencial

2.1 Os primórdios da Lei da Gravitação de Newton

A Lei da Gravitação Universal de Newton pode ter sido inspirada por algumas idéias já estabelecidas na época. Considere uma partícula m que realiza um movimento circular com raio r e módulo da velocidade v constantes como mostrado na Figura 2.1a. O arco descrito pela partícula é $ds = r d\theta$ e portanto

$$v = \dot{s} = r\dot{\theta}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, examinando a mudança de direção dos vetores (Figura 2.1b), vemos que $dv = v d\theta$ e derivando esta relação com relação ao tempo obtemos $\dot{v} = v\dot{\theta}$ e usando a equação (2.1)

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (2.2)$$

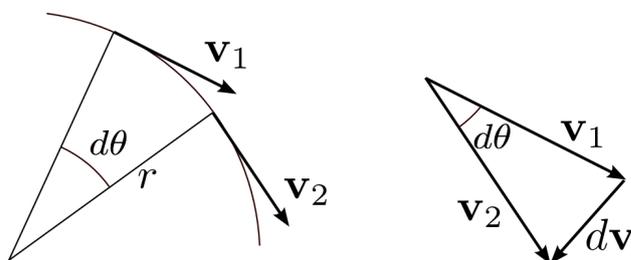


Figura 2.1: Velocidade circular...

Desta **aceleração circular** ou **centrípeta** podemos escrever a **força centrípeta**

$$F_c = m \frac{v^2}{r}, \quad (2.3)$$

que é a força necessária para que uma partícula de massa m realize um movimento circular de raio r com velocidade de módulo v .

Se analisamos o movimento de um planeta em sua órbita, se a considerarmos aproximadamente circular, estimamos a sua velocidade como $v = 2\pi r/T$, onde r é o raio da órbita e T o período orbital. A Lei dos Períodos de Kepler diz que $T = ar^{3/2}$, onde a é uma constante. Destas duas relações temos que

$$v = \frac{a'}{\sqrt{r}}, \quad (2.4)$$

a' outra constante. Este é o comportamento da velocidade orbital característica do **movimento Kepleriano**. Comparando a Eq. (2.4) com (2.3) temos

$$F \propto \frac{1}{r^2}. \quad (2.5)$$

Estes argumentos nos levam à idéia de que para que os planetas tivessem órbitas quase circulares com período orbital que obedecesse a Lei de Kepler, a força envolvida deveria ser do tipo mostrado acima. O importância do papel de Newton foi colocar aspectos físicos na formulação ao introduzir as massas como fonte da atração e ao desenvolver toda a teoria subjacente, que tentaremos resumir doravante.

2.2 O Campo Gravitacional

O fato inicial da teoria da gravitação é a **força gravitacional** existente entre dois corpos pontuais de massa m_1 e m_2 que estão afastados de uma distância r

$$\mathbf{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.6)$$

aqui escrita para enfatizar o fato de ser uma força central, na direção que une os centros dos dois corpos (\mathbf{r}). Em geral, ao invés de massas pontuais, usamos a densidade de massa $\rho(\mathbf{r})$, que no caso de corpos discretos como estrelas, representa a densidade média de estrelas num volume que compreende várias estrelas. Ainda, é mais prático escrever a força por unidade de massa,

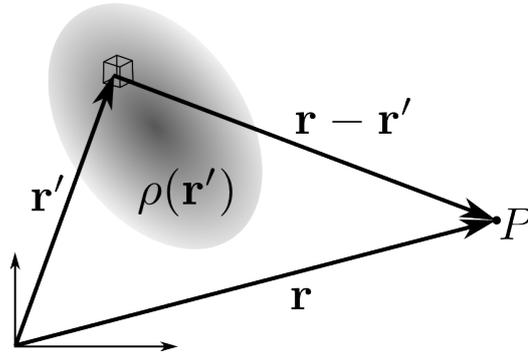


Figura 2.2: O campo gravitacional gerado pela distribuição de matéria $\rho(\mathbf{r}')$ no ponto P .

a aceleração. Deste modo, a aceleração resultante num ponto \mathbf{r} devido à massa especificada por $\rho(\mathbf{r}')$ pode ser escrita como uma integral de todas as contribuições infinitesimais $\delta\mathbf{g}$ escritas como

$$\delta\mathbf{g}(\mathbf{r}) = G \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta m(\mathbf{r}') = G \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') \delta\mathbf{r}'$$

que resulta em

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = G \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.7)$$

Se notamos que

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.8)$$

podemos escrever $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ como

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = G \nabla_{\mathbf{r}} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.9)$$

e se definimos o **potencial gravitacional** $\Phi(\mathbf{r})$ como

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.10)$$

então podemos escrever a força como um gradiente de um potencial

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

que é característica de **campos conservativos**.

2.2.1 Velocidades Circular e de Escape

A **velocidade circular** é a velocidade que teria uma partícula teste numa órbita circular a uma distância r do centro. Assim, como¹ $v_e^2 = r|\mathbf{F}|$ e $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ temos que

$$v_c^2 = r \frac{d\Phi}{dr} = \frac{G M(r)}{r} \quad (2.12)$$

a última igualdade segue porque a força resultante numa partícula a uma distância r do centro é gerada somente pela massa interior à posição da partícula, conforme o primeiro dos teoremas de Newton (seção 2.2.4).

A **velocidade de escape** é a aquela necessária para a partícula escapar do potencial gravitacional da galáxia. Em outras palavras é quando a energia cinética da partícula iguala-se à energia potencial, $\frac{1}{2}v^2 = |\Phi|$. Logo

$$v_e^2 = 2|\Phi| \quad (2.13)$$

2.2.2 Energia Potencial

A energia potencial de duas partículas m e m' separadas de uma distância r é a energia necessária para trazê-las desde o infinito até r ,

$$W = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r -G \frac{m m'}{r^2} dr = G m m' \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = -G \frac{m m'}{r}. \quad (2.14)$$

Para dois elementos de matéria dm e dm' nas posições \mathbf{r} e \mathbf{r}' , respectivamente, temos

$$dW = -G \frac{dm dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.15)$$

Se pensamos nestes elementos como diferentes porções da distribuição de matéria ρ então

$$\begin{aligned} dm &= \rho(\mathbf{r})dV = \rho(\mathbf{r}) d^3r & \text{e} \\ dm' &= \rho(\mathbf{r}')dV' = \rho(\mathbf{r}') d^3r'. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para calcular a energia potencial da distribuição ρ como um todo, substituímos as Eqs. (2.16) em (2.15) e integramos em todo o volume²

$$W = -\frac{1}{2} G \int \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r' \quad (2.17)$$

¹Lembre-se que todas as quantidades são escritas por unidades de massa, logo $v_e^2 = r|\mathbf{F}|$ na realidade é $v_e^2 = r\mathbf{a}_c$ escrita em termos da aceleração centrípeta

²A simetria desta expressão será útil adiante para definirmos o tensor energia potencial W_{ij} .

onde o fator $\frac{1}{2}$ aparece porque r eventualmente toma o valor de r' e vice-versa, portanto as contribuições de cada posição são consideradas duas vezes na integral. Se a Eq. (2.17) é escrita

$$W = -\frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) d^3r \int \frac{G\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (2.18)$$

notamos que a integral em \mathbf{r}' é a $\Phi(\mathbf{r})$ como na Eq. (2.10), portanto

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) d^3r. \quad (2.19)$$

Podemos escrever W em termos somente de Φ se usamos a Eq. (2.25): substituímos $\rho = \nabla^2\Phi/4\pi G$ na integral (2.19) e usamos a seguinte identidade de Green ([10])

$$\int (\Phi \nabla^2\Phi + |\nabla^2\Phi|) d^3r = \oint \Phi (\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (2.20)$$

mas como o volume é arbitrário e como $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ então o termo de superfície à direita da igualdade é nulo e usamos a igualdade

$$\int \Phi \nabla^2\Phi d^3r = \int |\nabla^2\Phi| d^3r$$

para escrever

$$\boxed{W = -\frac{1}{8\pi G} \int |\nabla^2\Phi(\mathbf{r})| d^3r.} \quad (2.21)$$

2.2.3 Equação de Poisson

Se tomamos o divergente da equação (2.7) temos

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{r}) = G \int \nabla \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.22)$$

mas sabemos que

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} = 0 \quad \text{se } \mathbf{r} - \mathbf{r}' \neq 0$$

Ou seja para pontos $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ a divergente é nulo. Se examinamos a integral (2.22) vemos que só os termos em que $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ contribuem, que é esperado uma vez que são os pontos \mathbf{r}' que especificam a distribuição de matéria, que é quem gera a força. Assim o volume de integração pode ser limitado a uma

pequena esfera de raio h em torno do ponto $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Se h for suficientemente pequeno, nesta região $\rho(\mathbf{r}')$ é constante e pode sair da integral (2.22). Assim teremos

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -G\rho(\mathbf{r}) \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leq h} \nabla' \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) d\mathbf{r}' \\ &= -G\rho(\mathbf{r}) \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=h} \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) d\mathbf{S}'\end{aligned}\quad (2.23)$$

onde usamos $\nabla = -\nabla'$ (∇' é com relação à \mathbf{r}') e no passo seguinte transformamos uma integral de volume numa integral de superfície. Na esfera infinitesimal $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = h$ que estamos integrando, o elemento de área vale em módulo $|d\mathbf{S}'| = h^2 d\Omega$, onde Ω é o ângulo sólido; se trocamos um h por $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ para incluir a informação da direção obtemos $d\mathbf{S}' = (\mathbf{r}-\mathbf{r}') h d\Omega$. Assim, considerando que $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3 = h^3$, a integral (2.23) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -G\rho(\mathbf{r}) \int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} h d\Omega \\ &= -G\rho(\mathbf{r}) \int d\Omega = 4\pi G\rho(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (2.24)$$

Se lembramos como escrevemos a força em termos do potencial, equação (2.11), obtemos a **equação de Poisson** que relaciona o potencial $\Phi(\mathbf{r})$ à densidade $\rho(\mathbf{r})$

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r})\quad (2.25)$$

A equação de Poisson também é chamada de **equação de fontes**, pois seu significado físico é que a distribuição de matéria $\rho(\mathbf{r})$ é quem gera (fonte) o potencial $\Phi(\mathbf{r})$. Também podemos entender que a densidade $\rho(\mathbf{r})$ num ponto \mathbf{r} se acomoda de acordo com a derivada segunda do potencial $\Phi(\mathbf{r})$ naquele ponto.

Para os pontos em que não há matéria, $\rho(\mathbf{r}) = 0$ a equação de Poisson reduz-se à **equação de Laplace**

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = 0\quad (2.26)$$

2.2.4 Teoremas de Newton

Os dois teoremas de Newton dizem respeito ao potencial gerado por distribuições esféricas de matéria. São eles:

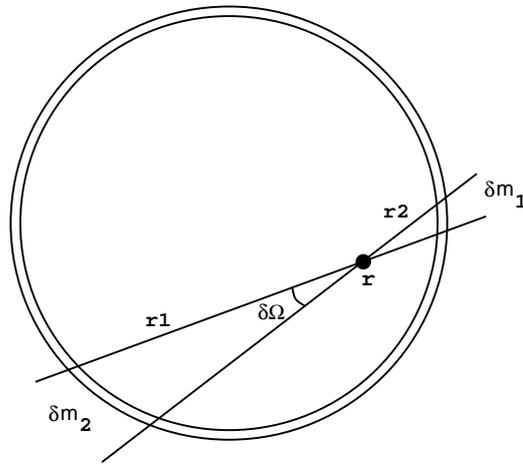


Figura 2.3: Primeiro Teorema de Newton

Primeiro Teorema de Newton *Um corpo dentro de uma casca esférica de matéria não experimenta nenhuma força líquida da casca.*

Segundo Teorema de Newton *A força gravitacional em um corpo que está fora de uma distribuição esférica de matéria é a mesma como se toda a matéria estivesse concentrada num ponto no centro da distribuição.*

A figura 2.3 auxilia na prova do primeiro teorema. Suponha uma partícula de massa m na posição \mathbf{r} . A força resultante sobre a partícula é a soma das contribuições de todas as massas δm em cada ângulo sólido $\delta\Omega$. A área compreendida por $\delta\Omega$ é $S_1 = r_1^2 \delta\Omega$, logo se a casca esférica tem densidade superficial de massa Σ , temos que $\delta m_1 = \Sigma dS_1 = \Sigma r_1^2 \delta\Omega$ e o mesmo para r_2 . Logo a força devido à δm_1 é

$$F_1 = G \frac{m \delta m_1}{r_1^2} = G m \Sigma \delta\Omega = F_2$$

com resultado idêntico para δm_2 . Em resumo a força não depende das distâncias r_1 e r_2 , sendo a contribuição de δm_1 a mesma de δm_2 . Isto decorre do fato que a área, logo a massa, compreendida pelo ângulo sólido é proporcional a r^2 enquanto a força decresce como r^{-2} . Assim, a região mais distante tem mais massa na mesma proporção em que a força produzida por esta massa é mais fraca, produzindo a mesma contribuição que a região mais próxima. Como são diametralmente opostas, cancelam-se e a força resultante é nula.

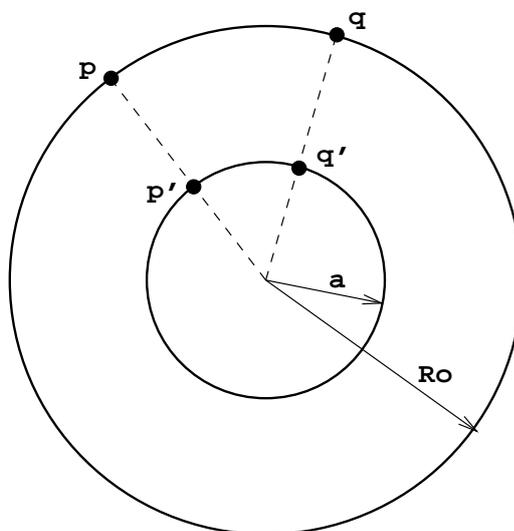


Figura 2.4: Segundo Teorema de Newton

Se a força é nula, o potencial dentro da casca é constante

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = cte$$

Escrevemos o potencial no centro da casca, que é o mesmo em todo interior, a partir da equação (2.10) usando $M = \int \rho d\mathbf{r} = \int \Sigma d\Omega$ e $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R_0$, R_0 o raio da casca. Assim, temos

$$\Phi = -G \int \frac{\Sigma}{R_0} d\Omega = -\frac{GM}{R_0}$$

A prova do segundo teorema é feita com a ajuda da figura 2.4, comparando o potencial num ponto \mathbf{p} localizado a uma distância R_0 do centro de uma casca esférica de massa M e raio a com o potencial num ponto \mathbf{p}' localizado a uma distância a do centro de uma casca esférica de massa M e raio R_0 . A contribuição $\delta\Phi$ ao potencial em \mathbf{p} com a parte da esfera com ângulo sólido $\delta\Omega$ localizado em \mathbf{q}' é dada por

$$\delta\Phi = -\frac{GM}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}'|} \frac{\delta\Omega}{4\pi}$$

onde a fração de massa que contribui é proporcional à fração do ângulo sólido $\delta\Omega/4\pi$. Examinando a situação simétrica, vemos que a contribuição $\delta\Phi'$ da

massa em \mathbf{q} ao potencial em \mathbf{p}' é

$$\delta\Phi' = -\frac{GM}{|\mathbf{p}' - \mathbf{q}|} \frac{\delta\Omega}{4\pi}$$

Geometricamente vemos que $|\mathbf{p}' - \mathbf{q}| = |\mathbf{p} - \mathbf{q}'|$, logo $\delta\Phi = \delta\Phi'$ e consequentemente $\Phi = \Phi'$. Mas nós sabemos que $\Phi' = -GM/R_0$, logo $\Phi = -GM/R_0$, que é potencial que seria gerado em \mathbf{p} se toda a massa M estivesse concentrada no centro da esfera, como queríamos demonstrar.

2.2.5 Tensores de Energia Cinética e Potencial

Para uma distribuição de massa $\rho(\mathbf{r})$ qualquer, definimos o **momentum de inércia** I como

$$I = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}^2 d\mathbf{r} \equiv \frac{3}{5}Mk^2 \quad (2.27)$$

em termos do qual definimos o **raio de giração** k que é o raio da esfera equivalente. Generalizando, podemos escrever o **tensor momentum de inércia** como

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) x_i x_j d\mathbf{x} \quad (2.28)$$

cujos **traço** $Tr(I_{ij}) \equiv \sum_i I_{ii}$ é o momentum de inércia. Da mesma maneira, podemos escrever a energia cinética como

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}^2 d\mathbf{x} \quad (2.29)$$

Sua generalização é o **tensor energia cinética**

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) v_i v_j d\mathbf{x} \quad (2.30)$$

cujos traço é T .

Similantemente, a energia potencial associada à uma distribuição de matéria é dada pela equação (??). O **tensor energia potencial de Chandrasekhar** pode ser escrito como

$$W_{jk} = - \int \rho(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} d\mathbf{x} \quad (2.31)$$

substituindo a expressão para o potencial, equação (2.10),

$$W_{jk} = G \int \rho(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}$$

que pode ser escrita como

$$W_{jk} = G \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] d\mathbf{x}' d\mathbf{x}$$

Se escrevemos

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} = \left[\sum_i (x_i - x'_i)^2 \right]^{-1/2}$$

é fácil verificar que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] = \frac{x_k - x'_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

por derivação direta. Então reescrevemos W_{jk} como

$$W_{jk} = G \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') x_j \frac{(x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \quad (2.32)$$

Para obter uma expressão manifestamente simétrica para W_{jk} usamos o artifício de reescrever (2.32) com \mathbf{x} trocado por \mathbf{x}' e somando a equação resultante de (2.32), cujo resultado é

$$W_{jk} = -\frac{G}{2} \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{(x_j - x'_j)(x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \quad (2.33)$$

Examinando (2.33) vemos que W_{ij} é simétrico, isto é

$$W_{jk} = W_{kj}$$

Calculando o traço de W_{jk}

$$\begin{aligned} Tr(W) &= -\frac{G}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ &= -\frac{G}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = W \end{aligned} \quad (2.34)$$

identificamo-lo como a energia potencial W .

2.2.6 A Inversão de Abel

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{g(t)dt}{(t-x)^\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.35)$$

$$g(t) = \frac{-\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left[\int_t^\infty \frac{df}{dx} \frac{dx}{(x-t)^{1-\alpha}} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} \right] \quad (2.36)$$

Capítulo 3

Potencial e Densidade

A característica determinante de um sistema esferoidal é como a sua densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ varia com o raio, chamado de perfil de densidade ou perfil de massa. É a densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ que determina o potencial $\Phi(\mathbf{r}, t)$ (seção 2.2.3), que rege o movimento das estrelas, cuja distribuição é $\rho(\mathbf{r}, t)$. Os parâmetros importantes incorporados ao perfil são a densidade característica ρ_c que pode ser a densidade central ou em determinado raio, a massa total M do esferóide e o raio de escala a .

Nos perfis estudados nesta seção, supõe-se que o sistema está em equilíbrio e virializado¹, neste caso o perfil de densidade não depende do tempo. Além disso, os perfis examinados aqui são escritos para sistemas esféricos, o que torna a distribuição de massa isotrópica. Resumindo, nesta seção escrevemos

$$\rho(\mathbf{r}, t) \rightarrow \rho(r)$$

que implica numa grande simplificação, mas também perda de generalidade, ao estudo no problema. Em muitos casos um perfil esférico é generalizado para o caso elipsoidal fazendo-se a uma mudança de escala na coordenada de posição

$$m^2 \equiv a_1^2 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \quad \text{ou alternativamente} \quad m^2 \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2}$$

em que uma casca esférica num dado raio r é substituída por um elipsóide cujos semi-eixos nas direções $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ tem respectivamente comprimentos a_1, a_2, a_3 (forma alternativa). Os homeóides de densidade constante são cascas elipsoidais similares e concêntricas.

¹diz-se que um sistema está virializado, quando obedece a equação do virial na forma escalar. Veja seção 3.4.5

3.1 Características dos Modelos de Massa

Um modelo de sistema esferoidal em geral inicia especificando-se um dos elementos da equação de Poisson, $\rho(\mathbf{x})$ ou $\Phi(\mathbf{x})$. Uma vez especificado o potencial ou a densidade, diversas características do modelo decorrem daí. Nesta seção expomos quais são as quantidades e conceitos mais relevantes e como são computadas. Posteriormente (seção 3) estes elementos são calculados explicitamente para uma série de perfis de massa usuais.

3.1.1 Raio e Densidade Característicos

O raio característico, ou raio de escala, é um comprimento constante que especifica a escala geral do potencial. Em geral, os perfis de densidade são escritos como a densidade normalizada por uma **densidade característica** ρ_c em função de um comprimento espacial normalizado pelo raio de escala a . Assim, um perfil de massa é escrito como

$$\rho/\rho_c = \mathcal{F}(r/a)$$

onde \mathcal{F} tem uma forma funcional qualquer. Desta forma, especificando-se ρ_c e a podemos determinar os pontos de referência para o perfil de densidade, em resumo, calibrar a curva de densidade de acordo com a escala de valores desejada.

3.1.2 Massa Acumulada

A massa acumulada é a quantidade de massa interior a um raio r

$$M(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.1)$$

Se o potencial é esférico, a parte angular da integral do volume resulta no ângulo esférico total e temos

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (3.2)$$

A equação (3.2) pode ser lida como a integral da casca esférica de espessura dr cujo volume é $4\pi r^2 dr$. Em particular a **massa total** é $M_T = M(\infty)$

3.1.3 Raio de Meia Massa

O raio de meia massa $r_{\frac{1}{2}}$ é a distância do centro do esferóide que contém metade da massa total. Se temos a expressão para $M(r)$ a partir da integral (3.2) podemos encontrar $r_{\frac{1}{2}}$ resolvendo a equação

$$M(r_{\frac{1}{2}}) = \frac{M_T}{2} \quad (3.3)$$

que segue diretamente da definição. O raio de meia massa em geral é escrito em termos do raio de escala a e nos dá uma idéia da concentração do modelo, quanto menor $r_{\frac{1}{2}}$, mais concentrada a distribuição de massa. Evidentemente, só faz sentido defini-lo para perfis cuja massa é finita.

3.1.4 Massa Característica

Para cada perfil, a massa caracterísitica é definida² como a massa de uma esfera homogênea de densidade ρ_c e raio a .

$$M_c \equiv \frac{4\pi}{3} \rho_c a^3 \quad (3.4)$$

Em geral $M_c \neq M$.

3.2 Perfis

3.2.1 Lista de Perfis

Kepler

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

Hernquist

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r+a}$$

Einasto

$$\rho(r) = \rho_0 \exp^{-Ar^\alpha}$$

Homegenea Finita

$$\rho(r) = \rho_0 H(a-r)$$

²Esta definição não é usual, mas simplifica a notação e introduz um forma alternativa para concentração.

Lei de Potência

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{a}{r}\right)^\alpha$$

Isotermica singular

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2$$

Pseudo Isotermica

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{1}{1 + r/a}\right)^2$$

Com núcleo

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{1}{1 + r/a}\right)^4$$

Hubble

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{1}{1 + (r/a)^2}\right)^{3/2}$$

Jaffe

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{a^4}{3r^2(r+a)^2}$$

Plummer

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{(1 + (r/a)^2)^{5/2}}$$

NFW

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{\frac{r}{a}(1 + (r/a))^2}$$

Dehnen

$$\rho(r) = \frac{3 - \gamma}{4\pi} \frac{Ma}{r^\gamma (r+a)^{4-\gamma}}$$

Sersic

$$\sigma(R) = \Sigma_0 \exp[-(R/a)^{1/n}]$$

Isócrono

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}$$

3.2.2 Massa Pontual

A densidade de uma massa pontual pode ser escrita em termos da função $\delta(r)$ de Dirac

$$\rho(r) = \rho_c \delta(\mathbf{r}) = \rho_c \frac{\delta(r)}{2\pi r^2} \quad (3.5)$$

$$\Phi(r) = 2G \int \frac{\rho_c \int \delta(r) dr}{r^2} dr \quad (3.6)$$

usando a identidade $M = \rho_c \int_0^\infty \delta(t) dt = \frac{\rho_c}{2}$ pois $\int_{-\infty}^\infty \delta(t) dt = 1$ com unidades de volume, obtemos a conhecida expressão para o potencial da massa pontual

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (3.7)$$

de onde obtemos as velocidades circular e de escape

$$v_c^2(r) = \frac{GM}{r} \quad (3.8)$$

$$v_e^2(r) = 2 v_c^2(r) \quad (3.9)$$

Este potencial é também chamado de **Kepleriano**, pois $v_c \propto r^{-1/2}$ como no caso do Sistema Solar, estudado por Kepler. A massa acumulada independe da posição e $M = \rho_c/2$, exceto pela diferença nas unidades introduzida por $\int \delta(r) dr$. Evidentemente, neste caso $M(r) = M$. A energia potencial de uma massa pontual é indefinida.

3.2.3 Esfera Homogênea Finita

A densidade é escrita

$$\rho(r) = \rho_c H(a - r) \quad (3.10)$$

em que $H(a - r)$ é a função degrau de Heaviside. A esfera é homogênea até $r = a$. O potencial é dado por

$$\Phi(r) = \begin{cases} -2\pi G \rho_c (a^2 - r^2/3) & r \leq a \\ -GM/r & r > a \end{cases} \quad (3.11)$$

observe que para $r > a$ o potencial é o mesmo da massa pontual, como determinado pelo teorema de Newton (seção 2.2.4). A velocidade circular associada à esfera homogênea cresce linearmente com o raio

$$v_c^2 = \frac{4\pi G \rho_c}{3} r^2 \quad (3.12)$$

e a massa acumulada é

$$M(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_c \quad r < a \quad (3.13)$$

dentro da esfera e simplesmente a massa total

$$M_T = \frac{4\pi a^3}{3} \rho_c \quad (3.14)$$

para $r > a$. A energia potencial da esfera é

$$W = -\frac{3}{4} \frac{GM^2}{a} \quad (3.15)$$

O raio de meia massa corresponde a

$$r_{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt[3]{2}} \simeq 0.79 a \quad (3.16)$$

3.2.4 Esfera Lei-de-Potência

A densidade que decresce com uma potência do raio é chamada lei-de-potência

$$\rho(r) = \rho_c \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha} \quad \alpha > 0, \alpha \neq 2, \alpha \neq 3 \quad (3.17)$$

seu potencial é escrito

$$\Phi(r) = -\frac{4\pi G \rho_c a^\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 3) r^{\alpha-2}} \quad (3.18a)$$

ou usando a definição de M_c (seção 3.1.4)

$$\Phi(r) = -\frac{3M_c G}{(\alpha - 2)(\alpha - 3) a} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha+2} \quad (3.18b)$$

A velocidade circular é

$$v_c^2(r) = \frac{3M_c G}{(\alpha - 3) a} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha+2} \quad (3.19)$$

Como polinômio, derivando o potencial e multiplicando-se pela mesma variável (v_c^2) obtemos um polinômio de mesma ordem. Assim a relação entre o potencial e a velocidade circular é simplesmente

$$v_c^2 = (2 - \alpha) \Phi(r) \quad (3.20)$$

Integrando-se a massa tem-se

$$M(r) = \frac{3M_c}{(3-\alpha)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha+3} \quad (3.21)$$

Dentre as esferas lei-de-potência, duas merecem especial atenção: a esfera isotérmica singular e a de grau $\alpha = 4$ não singular. A primeira é importante do ponto de vista físico, pois seria este o perfil adquirido por uma distribuição maxwelliana de velocidades. A segunda pelo apelo estético formal de suas propriedades.

3.2.5 Esfera isotérmica singular

É a esfera cuja lei de densidade é a da equação (3.17) com $\alpha = 2$.

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \quad (3.22)$$

cujo potencial é escrito

$$\Phi(r) = 4\pi G \rho_c a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{3M_c}{a} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (3.23)$$

Um potencial logaritmo. A velocidade circular não depende do raio, constante em toda esfera,

$$v_c^2 = 4\pi G \rho_c a^2 = \frac{3M_c G}{a} \quad (3.24)$$

enquanto a massa acumulada cresce linearmente com o raio

$$M(r) = \frac{3M_c}{a} r \quad (3.25)$$

O irrealidade física dos modelos baseados na esfera isotérmica singular reside no fato de que sua massa é infinita, assim como a energia potencial.

3.2.6 Esfera de quarto grau com caroço

O perfil lei-de-potência grau 4 com caroço é definido como

$$\rho(r) = \rho_c \left(\frac{a}{a+r}\right)^4 = \frac{\rho_c}{(1+r/a)^4} \quad (3.26)$$

cujo pontencial é

$$\Phi(r) = -\frac{GMa}{2} \frac{(2a+3r)}{r(a+r)^2} \quad (3.27)$$

ou ainda

$$\Phi(r) = -GM \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r+r_0} + \frac{r_0}{2(r+r_0)^2} \right\}$$

e a velocidade circular

$$v_c^2 = \frac{GM}{a} \frac{3ar + a^2 + 3r^2}{r(a+r)^3} \quad (3.28)$$

a massa acumulada é simplesmente

$$M(r) = M_T \frac{r^3}{(a+r)^3} \quad (3.29)$$

onde a massa total

$$M_T = \frac{4\pi a^3}{3} \rho_c = M_c \quad (3.30)$$

corresponde à massa característica, isto é, esta esfera tem a mesma massa de uma esfera homogênea com raio a e com a densidade a sua densidade central ρ_c . A energia potencial é dada por

$$W = -\frac{3}{20} \frac{GM^2}{a} \quad (3.31)$$

e o raio de meia massa

$$r_{\frac{1}{2}} = [2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} + 1] a \simeq 3.85 a \quad (3.32)$$

A densidade projetada é

$$\Sigma(R) = \frac{\rho_c a^4}{3(a^2 - R^2)^{\frac{7}{2}}} \left\{ (3R^4 + 12R^2 a^2) \ln \left[\frac{a - \sqrt{a^2 - R^2}}{R} \right] + (2a^3 + 13aR^2) \sqrt{a^2 - R^2} \right\} \quad (3.33)$$

Neste caso a densidade projetada é uma função complexa para $R > a$, mas $\Im(\Sigma) \ll \Re(\Sigma)$ e $\Im(\Sigma(R))$ é próximo de zero exceto para $R = a$, portanto podemos considerar somente a parte real da função (3.33). Os limites são

$$\lim_{R \rightarrow 0} \Sigma(R) = \frac{2}{3} a \rho_c \quad (3.34)$$

$$\lim_{R \rightarrow a} \Sigma(R) = \frac{16}{105} a \rho_c \quad (3.35)$$

Em ordem crescente de grau, a primeira esfera lei-de-potência que possui massa limitada para α inteiro é a $\alpha = 4$. Além disso, é conveniente somar ao denominador a escala a a fim de eliminar a singularidade na origem. Assim, nas partes externas da esfera $\rho(r) \sim r^{-4}$ mas para raios internos à a , a densidade torna-se mais suave até um valor definido na origem. A região $r \leq a$ é o caroço. Em esferóides reais raramente a derivada da densidade diminui tanto nas partes internas, motivo pelo qual alguns autores escrevem um dos r fora dos parênteses, introduzindo novamente uma singularidade e diminuindo o efeito da escala a somada ao raio. São exemplos o perfil de Hernquist (Seção 3.2.8) ou a generalização de Dehnen (Seção 3.2.13)

3.2.7 Esfera Modificada de Hubble

A partir do perfil de densidade de Hubble

$$\rho(r) = \frac{\rho_c}{\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.36)$$

escrevemos o seu potencial

$$\Phi(r) = -3GM_c \frac{\sinh(r/a)}{r} \quad (3.37)$$

A velocidade circular pode ser escrita como

$$v_c^2 = 3M_c \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} - \frac{\operatorname{arcsinh}(r/a)}{r} \right] \quad (3.38)$$

Como $\rho(r) \sim r^{-3}$, a densidade decresce tão rápido como o volume cresce, a massa total M_T é infinita, da mesma forma que a energia potencial W . Em tais casos não faz sentido definir o $r_{\frac{1}{2}}$. A variação da massa com o raio é dada por

$$M(r) = 3M_c \left[\operatorname{arcsinh}\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right] \quad (3.39)$$

3.2.8 Esfera de Hernquist

O perfil de Hernquist (Hernquist 1990)

$$\rho(r) = \frac{2\rho_c}{3} \frac{1}{\frac{r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right)^3} \quad (3.40)$$

resulta num potencial de forma simples

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r+a} \quad (3.41)$$

A velocidade circular é dada por

$$v_c^2 = GM \frac{r}{(r+a)^2} \quad (3.42)$$

e a massa acumulada por

$$M(r) = M \left(\frac{r}{r+a} \right)^2 \quad (3.43)$$

De onde se obtém que $M_T = M$. A energia potencial resulta em

$$W = -\frac{1}{6} \frac{GM^2}{a} \quad (3.44)$$

e o raio de meia massa é

$$r_{\frac{1}{2}} = (1 + \sqrt{2}) a \simeq 2.41 a \quad (3.45)$$

$$\Sigma(R) = Ma \left[\frac{R^2 + 2a^2}{(a^2 - R^2)^{5/2}} \left(\ln \left(\frac{R}{\sqrt{a^2 - R^2} - a} \right) + i\pi \right) - \frac{3a}{(R+a)^2(R-a)^2} \right] \quad (3.46)$$

3.2.9 Esfera de Jaffe

O potencial de Jaffe (Jaffe 1983) é derivado da distribuição de matéria

$$\rho(r) = \frac{\rho_c}{3} \frac{a^4}{r^2(r+a)^2} \quad (3.47)$$

que resulta num potencial logaritmico

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{a} \ln \left(\frac{r}{r+a} \right) \quad (3.48)$$

cuja velocidade circular é

$$v_c^2 = \frac{GM}{r+a} \quad (3.49)$$

e a massa acumulada

$$M(r) = M \frac{r}{r+a} \quad (3.50)$$

A energia potencial

$$W = \frac{GM^2}{2a} \quad (3.51)$$

e o raio de meia massa

$$r_{\frac{1}{2}} = a \quad (3.52)$$

3.2.10 Esfera de Plummer

O perfil de densidade de Plummer é a solução para um polítropo de grau $n = 5$

$$\rho(r) = \frac{\rho_c}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.53)$$

e tem um potencial escrito como

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{a^2 + r^2}} \quad (3.54)$$

A velocidade circular

$$v_c^2 = GM \frac{r^2}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.55)$$

e a massa acumulada

$$M(r) = M \frac{r^3}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.56)$$

A energia potencial

$$W = -\frac{3\pi}{32} \frac{GM^2}{a} \quad (3.57)$$

e o raio de meia massa

$$r_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{62^{\frac{1}{3}} + 32^{\frac{2}{3}} + 3} a \simeq 1.3 a \quad (3.58)$$

3.2.11 Esfera de Sersic

A esfera de Sersic (Sersic 1968, Ciotti 1991) é a única das listadas aqui que deriva de um fato observacional, a distribuição de luminosidade projetada no céu $I(R)$.

$$I(R) = I_0 e^{-b_n \left(\frac{R}{R_n}\right)^{\frac{1}{n}}} \quad (3.59)$$

escrita em termos da luminosidade central I_0 e do raio efetivo R_n . A quantidade b_n é definida de tal forma que a luminosidade até R_n seja metade da luminosidade total

$$b_n \simeq 2n - 0.324 \quad (3.60)$$

Como a luminosidade central dificilmente está acessível à observação, por efeitos de visagem³, é conveniente escrever $I(R)$ como

$$I(R) = I_0 e^{-b_n \left[\left(\frac{R}{R_m}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]} \quad (3.61)$$

que igualando à equação (3.59) num raio qualquer obtemos

$$I_0 = I_m e^b \quad (3.62)$$

Portanto para uso teórico geralmente a forma (3.59) é preferida por sua simplicidade, enquanto observacionalmente a forma (3.61) é mais conveniente. Podemos relacioná-las pela equação (3.62).

Se a geometria do esferóide é conhecida podemos deprojetar a luminosidade projetada $I(R)$ para obter a luminosidade espacial $j(\mathbf{r})$ e, mediante uma escolha razoável da razão massa luminosidade Υ , obter a densidade $\rho(\mathbf{r})$. Em geral o problema é degenerado; para o caso mais simples, o esférico ($\mathbf{r} \rightarrow r$), podemos escrever usando a inversão de Abel (Seção 2.2.6)

$$I(R) = 2 \int_0^\infty j(r) dz \quad (3.63)$$

como

$$r^2 = R^2 + z^2 \quad (3.64)$$

resulta em

$$I(R) = 2 \int_0^\infty \frac{j(r) r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}} \quad (3.65)$$

³Também conhecido por *seeing*.

com a inversão de Abel, equação 2.36, podemos escrever $\rho(r) = j(r)/\Upsilon$

$$\rho(r) = \Upsilon \frac{I_0 b_n}{n\pi R_n^{1/n}} \int_r^\infty \frac{R^{\frac{1}{n}-1} e^{-b_n \left(\frac{R}{R_n}\right)^{\frac{1}{n}}} dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (3.66)$$

Esta integral para $\rho(r)$ não pode ser resolvida analiticamente na maioria das vezes. Mesmo em casos especiais, as soluções para a densidade e potencial são escritas em termos das funções G de Meijer⁴ (Mazure & Capelato 2002), que são de tratamento difícil e fisicamente pouco elucidativas. A densidade também pode ser aproximada analiticamente pela forma (Lima Neto et al. 1999)

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-p} \exp \left[-\left(\frac{r}{a}\right)^{1/n} \right] \quad (3.67)$$

$$p = 1 - 0.6097 \frac{1}{n} + 0.05563 \frac{1}{n^3}$$

$$0.5 < n < 10$$

cujo potencial, mesmo para $p = -1$ é dado como combinações lineares das funções de Whittaker.

3.2.12 Esfera de Navarro-Frenk-White

$$\rho(r) = \frac{\rho_c}{\frac{r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2} \quad (3.68)$$

Podemos escrever o potencial em termos da massa característica⁵ como

$$\Phi(r) = -\frac{3GM_c}{r} [1 + \ln(r + a)] \quad (3.69)$$

e a velocidade de escape

$$v_c^2 = 3GM_c \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+a} - \frac{\ln(r+a)}{r} \right] \quad (3.70)$$

A massa acumulada é dada por

$$M(r) = 3M_c \left[\ln(r+a) - \frac{r}{r+a} - \ln(a) \right] \quad (3.71)$$

Evidentemente, como a massa total é infinita, assim o é a energia potencial e o raio de meia massa é indeterminado.

⁴As funções G de Meijer são definidas como integrais de produtos da função Γ e reduzem-se às funções de Bessel para $n = 1$.

⁵Observe que neste caso a $M_T = \infty$

3.2.13 Esferas de Dehnen

A família de esferas de Dehnen (Dehnen 1993), definida como

$$\rho(r) = \frac{3 - \gamma}{4\pi} \frac{Ma}{r^\gamma(r+a)^{4-\gamma}} \quad 0 \leq \gamma < 3 \quad (3.72)$$

não constituem modelo novo, mas uma generalização de um perfil do tipo de Hernquist ($\gamma = 1$, Seção 3.2.8) ou da esfera Lei-de-Potência Modificada ($\gamma = 0$, Seção 3.2.4). Tais perfis possuem um caroço central que se pronuncia nas regiões em que $r < a$. Na medida em que γ cresce, potências de r deixam de se somar a a no denominador e o caroço central passa a ter relativamente menor importância. Nos casos em que $\gamma > 0$ a densidade central é singular, apesar disso, a massa total do modelo é sempre finita, pois em todos os casos $\rho(r) \sim r^{-4}$. Define-se a quantidade

$$\Lambda(r) \equiv \frac{r}{r+a} = \frac{1}{1+a/r} \quad (3.73)$$

e escrevemos os resultados do perfil em termos de Λ . Assim, o potencial é

$$\Phi(r) = \frac{GM}{(\gamma-2)a} \Lambda^{2-\gamma} \quad (3.74)$$

a velocidade circular

$$v_c^2(r) = \frac{GM}{r+a} \Lambda^{2-\gamma} \quad (3.75)$$

a massa acumulada

$$M(r) = M\Lambda^{3-\gamma} \quad (3.76)$$

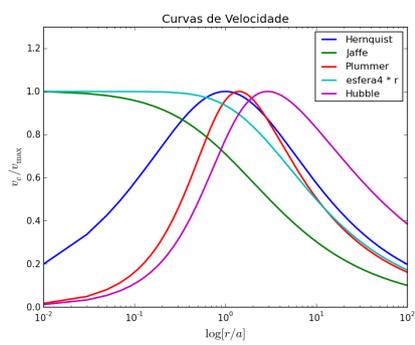
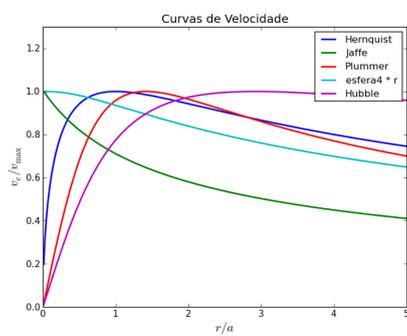
a energia potencial

$$W = -\frac{GM^2}{2a} \frac{(\gamma-3)}{(\gamma-2)(2\gamma-5)} \quad (3.77)$$

e o raio de meia massa

$$r_{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2^{1/(3-\gamma)} - 1} \quad (3.78)$$

3.2.14 Resumo dos perfis



Perfil	$\rho(r)$	$\Phi(r)$	v_c^2	$M(r)$	W
Pontual	$\rho_c \frac{\delta(r)}{2\pi r^2}$	$-\frac{GM}{r}$	$\frac{GM}{r}$	M_T	-
Homogênea	$\rho_c H(a-r)$	$\begin{cases} -2\pi G\rho_c (a^2-r^2)/3 & r \leq a \\ -GM/r & r > a \end{cases}$	$\frac{4\pi G\rho_c}{3} r^2$	$\frac{4\pi r^3}{3} \rho_c \quad r < a$	$-\frac{3}{4} \frac{GM^2}{a}$
Lei-de-Potência	$\rho_c \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha} \quad \alpha > 0$	$-\frac{3M_c G}{(\alpha-2)(\alpha-3)a} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha+2}$	$(2-\alpha) \Phi(r)$	$\frac{3M_c}{(3-\alpha)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\alpha+3}$	-
Hubble	$\frac{\rho_c}{\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$	$-3GM_c \frac{\sinh(r/a)}{r}$	$3M_c \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}} - \frac{\operatorname{arcsinh}(r/a)}{r} \right]$	$3M_c \left[\operatorname{arcsinh}\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}} \right]$	∞
Hernquist	$\frac{2\rho_c}{3} \frac{1}{\left(1+\frac{r}{a}\right)^3}$	$-\frac{GM}{r+a}$	$GM \frac{r}{(r+a)^2}$	$M \left(\frac{r}{r+a}\right)^2$	$-\frac{1}{6} \frac{GM^2}{a}$
Dehnen	$\frac{3-\gamma}{4\pi} \frac{Ma}{r^\gamma (r+a)^{4-\gamma}}$	$\frac{GM}{(\gamma-2)a} \frac{r}{r+a} \quad 2-\gamma$	$\frac{GM}{r+a} \frac{r}{r+a} \quad 2-\gamma$	$M \frac{r}{r+a} \quad 3-\gamma$	$-\frac{GM^2}{2a} \frac{(\gamma-3)}{(\gamma-2)(2\gamma-5)}$
Plummer	$\frac{\rho_c}{\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{2}}}$	$-\frac{GM}{\sqrt{a^2+r^2}}$	$GM \frac{r^2}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$	$M \frac{r^3}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{3\pi}{32} \frac{GM^2}{a}$
Jaffe	$\frac{\rho_c}{3} \frac{a^4}{r^2 (r+a)^2}$	$-\frac{GM}{a} \ln\left(\frac{r}{r+a}\right)$	$\frac{GM}{r+a}$	$M \frac{r}{r+a}$	$\frac{1}{2} \frac{GM^2}{a}$
NFW	$\frac{\rho_c}{a} \frac{1}{\left(1+\frac{r}{a}\right)^2}$	$-\frac{3GM_c}{r} [1 + \ln(r+a)]$	$3GM_c \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+a} - \frac{\ln(r+a)}{r} \right]$	$3M_c \left[\ln(r+a) - \frac{r}{r+a} - \ln(a) \right]$	∞

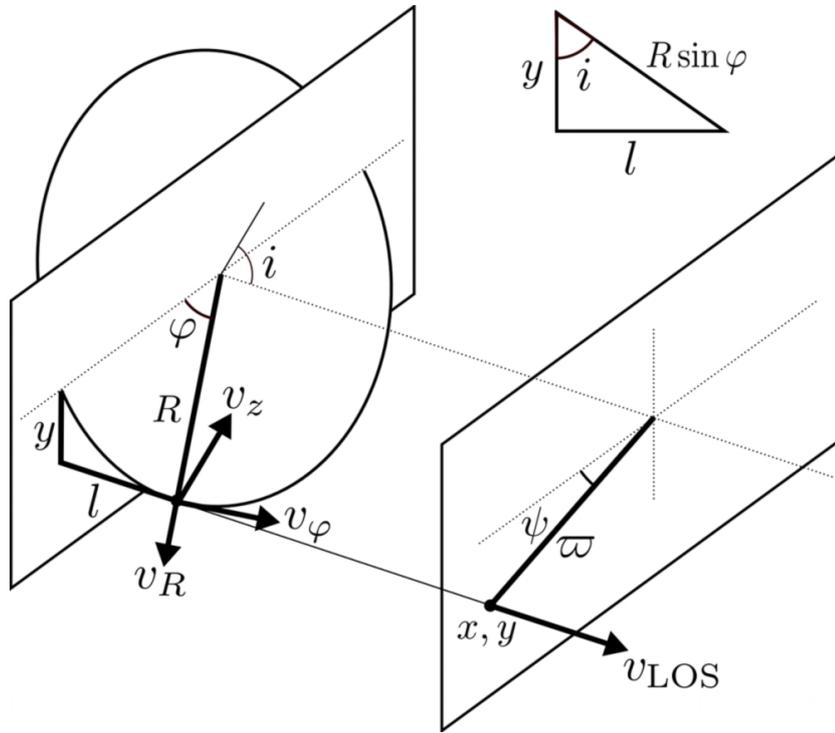


Figura 3.1: Geometria do plano equatorial galáctico com relação ao plano do céu.

3.3 Quantidades projetadas na linha de visada

Considere a Figura 3.1. O disco representa o plano de simetria da galáxia enquanto o retângulo é o plano do céu, perpendicular à linha de visada. O plano do disco define um sistema de coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) . No plano do céu temos as coordenadas (x, y, l) , onde l aponta para o observador; também no plano do céu podemos definir as coordenadas polares (ϖ, ψ) , onde $\varpi^2 = x^2 + y^2$. À distância R na galáxia corresponde a distância projetada ϖ no plano do céu.

O efeito da projeção suprime da informação disponível ao observador uma coordenada espacial (na direção do observador) e duas velocidades (perpendiculares entre si e paralelas ao plano do céu) pois a informação física relacionada a estas não pode ser recuperada.

Podemos estabelecer uma relação entre a distância medida na galáxia R e medida no plano do céu a partir do diagrama mostrado na Figura 3.1. Projetando R e ϖ primeiro em direção a linha dos nodos ψ_0 e em seguida

em uma direção perpendicular a ψ_0 temos, respectivamente

$$R \cos \theta = \varpi \cos \psi \quad (3.79)$$

e

$$R \sin \theta = \varpi \frac{\sin \psi}{\cos i}. \quad (3.80)$$

Escrevendo ambas as equações (3.79) e (3.80) ao quadrado usando a identidade trigonométrica $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ obtemos

$$R = \varpi \sqrt{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi / \cos^2 i} \quad (3.81)$$

ou

$$R = \alpha \varpi \quad (3.82)$$

onde $\alpha \equiv \sqrt{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi / \cos^2 i}$,

ou seja, todos os comprimentos são escalados com α .

3.3.1 Velocidade na linha de visada v_{LOS}

Com relação as velocidades, notamos que a relação entre a velocidade circular v_c e a velocidade na linha de visada v_{los} é

$$v_{\text{los}} = v_c \cos \theta \sin i$$

que associada às equações (3.79) e (3.83) resulta

$$v_{\text{los}} = v_c \frac{\cos \psi \sin i}{\alpha} \quad (3.83)$$

Generalizando para o caso em que a galáxia tem velocidade sistêmica v_s e que a linha dos nodos tem um ângulo ψ_0 no plano do céu, teremos

$$v_{\text{los}} = v_s + v_c \frac{\sin i \cos(\psi - \psi_0)}{\sqrt{\cos^2(\psi - \psi_0) + \sin^2(\psi - \psi_0) / \cos^2 i}}. \quad (3.84)$$

Como exemplo, considere o potencial de Hernquist (Seção 3.2.8). A velocidade circular correspondente é $v_c = \sqrt{GM\bar{R}}/(r+a)$. Se substituirmos R e a pelos correspondentes comprimentos projetados (ϖ e A , respectivamente) usando $R = \alpha\varpi$ e $a = \alpha A$, teremos

$$v_c = \frac{\sqrt{GM\alpha\varpi}}{(\alpha\varpi + \alpha A)} = \frac{\sqrt{GM\varpi}}{\varpi + A} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

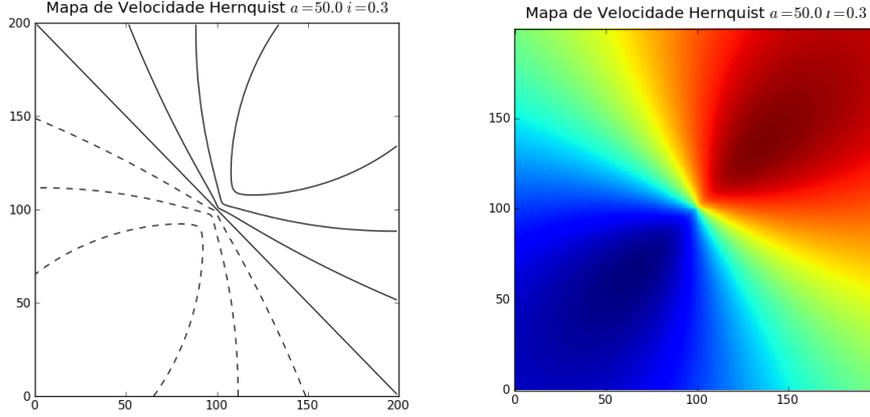


Figura 3.2: Diagrama de Aranha para o potencial de Hernquist

e neste caso

$$v_{\text{los}} = v_s + \frac{\sqrt{GM\varpi}}{\varpi + A} \frac{\sin i \cos(\psi - \psi_0)}{[\cos^2(\psi - \psi_0) + \sin^2(\psi - \psi_0)/\cos^2 i]^{3/4}},$$

que é uma relação entre parâmetros geométricos (ψ, ψ_0, i) e outros relacionados ao potencial (M, A) . O mapa de v_{los} no céu tem um aspecto que lhe confere o nome de **diagrama de aranha**, que pode ser visto na figuras 3.2 (sintético) e 3.3 (galáxia M 81).

3.3.2 Dispersão de velocidades projetada σ_{LOS}

Para obter a dispersão de velocidades projetada σ_{LOS} , inicialmente escrevemos a velocidade projetada em termos das coordenadas na galáxia e então usamos

$$\sigma_{\text{LOS}}^2 = \langle v_{\text{LOS}}^2 \rangle - \langle v_{\text{LOS}} \rangle^2 \quad (3.85)$$

Examinado a Figura 3.1 podemos escrever

$$v_{\text{LOS}} = v_R \sin \varphi \sin i + v_\varphi \cos \varphi \sin i + v_z \cos i. \quad (3.86)$$

Assim,

$$\begin{aligned} v_{\text{LOS}}^2 = & v_R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 i + v_\varphi^2 \cos^2 \varphi \sin^2 i + v_z^2 \cos^2 i + \\ & + v_R v_\varphi \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 i + v_R v_z \sin \varphi \cos i \sin i + v_z v_\varphi \cos \varphi \cos i \sin i. \end{aligned} \quad (3.87)$$

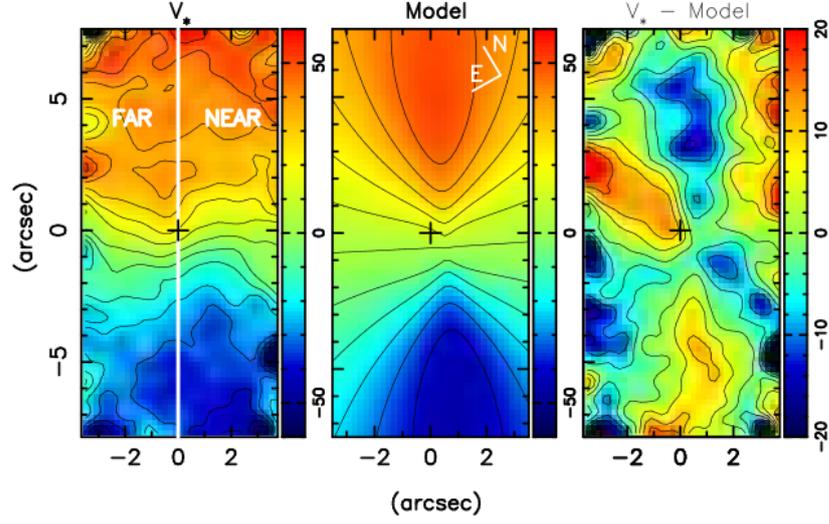


Figura 3.3: Diagrama de Aranha para a região central da galaxia M81. Esquerda: mapa de velocidades medido. Meio: modelo do mapa de velocidades baseado no potencial de Plummer. Direita: resíduo observado menos modelo (adaptado de Schnorr et al. 2011).

Usando as relações no plano do céu

$$\frac{x}{\varpi} = \cos \psi, \quad \frac{y}{\varpi} = \sin \psi \quad \text{e} \quad \frac{y}{x} = \tan \psi. \quad (3.88)$$

em conjunto com as equações (3.79) e (3.80) temos que

$$\cos^2 \varphi = \frac{x^2}{R^2} \quad \text{e} \quad \sin^2 \varphi = \frac{y^2}{R^2 \cos^2 i}. \quad (3.89)$$

Logo

$$\begin{aligned} v_{\text{LOS}}^2 = & v_R^2 \frac{y^2}{R^2 \cos^2 i} \sin^2 i + v_\varphi^2 \frac{x^2}{R^2} \sin^2 i + v_z^2 \cos^2 i + \\ & + v_R v_\varphi \frac{xy}{R \cos i} \sin^2 i + v_R v_z \frac{y}{R} \sin i + V_z v_\varphi x \cos i \sin i. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Ao calcular $\langle v_{\text{LOS}}^2 \rangle$ podemos supor que $\langle v_R v_\varphi \rangle = \langle v_R v_z \rangle = \langle v_z v_\varphi \rangle = 0$. Usando (3.81) e (3.88) temos que

$$R^2 = x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 i} \quad (3.91)$$

e

$$\begin{aligned}
\langle v_{\text{LOS}}^2 \rangle &= \langle v_R^2 \rangle \left[\frac{y^2}{x^2 \cos^2 i + y^2} \right] \sin^2 i + \\
&+ \langle v_\varphi^2 \rangle \left[\frac{x^2}{x^2 + y^2 / \cos^2 i} \right] \sin^2 i + \\
&+ \langle v_z^2 \rangle \cos^2 i.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Podemos reescrever o termo que multiplica $\langle v_R \rangle$ na equação acima como

$$\begin{aligned}
\frac{y^2 \sin^2 i}{x^2 \cos^2 i + y^2} &= \frac{x^2 \cos^2 i \sin^2 i - x^2 \cos^2 i \sin^2 i + y^2 \sin^2 i}{x^2 \cos^2 i + y^2} \\
&= \frac{(x^2 \cos^2 i + y^2) \sin^2 i - x^2 \cos^2 i \sin^2 i}{x^2 \cos^2 i + y^2} \\
&= \sin^2 i + \frac{x^2 \sin^2 i}{x^2 + y^2 / \cos^2 i}.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Notando o triângulo em destaque na Figura 3.1, temos que $y \cos i + l \sin i = R \sin \varphi$ ou $y \cos i + l \sin i = y / \cos i$ pela usando as relações (3.88). A Equação (3.92) fica

$$\begin{aligned}
\langle v_{\text{LOS}}^2 \rangle &= \langle v_R^2 \rangle \left[\sin^2 i - \frac{x^2 \sin^2 i}{x^2 + (y \cos i + l \sin i)^2} \right] + \\
&\langle v_\varphi^2 \rangle \left[\frac{x^2 \sin^2 i}{x^2 + (y \cos i + l \sin i)^2} \right] + \langle v_z^2 \rangle \cos^2 i
\end{aligned} \tag{3.94}$$

ou simplificadamente

$$\langle v_{\text{LOS}}^2 \rangle = \langle v_R^2 \rangle [\sin^2 i - \xi(x, y, l)] + \langle v_\varphi^2 \rangle \xi(x, u, l) + \langle v_z^2 \rangle \cos^2 i \tag{3.95}$$

$$\xi(x, y, l) = \frac{x^2 \sin^2 i}{x^2 + (y \cos i + l \sin i)^2} \tag{3.96}$$

3.4 Sistemas sem Colisões

3.4.1 Função de Distribuição $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

No espaço de fases, a descrição completa de um sistema composto por N partículas pode ser atribuída à função de distribuição $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, que corresponde ao número de partículas no elemento de volume no espaço de fases cuja posição varia $d\mathbf{r}$ em torno de \mathbf{r} e a velocidade $d\mathbf{v}$ em torno de \mathbf{v} , no tempo t . Esta função é chamada **função de distribuição** (DF) no espaço de fases; na verdade trata-se de uma densidade.

Num sistema clássico determinístico, uma vez que se conheçam as condições iniciais de um sistema, as equações de movimento nos permitem conhecer qualquer estado deste sistema num dado tempo. Em se tratando da função de distribuição, precisamos conhecer a equação de evolução da $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, tema desta seção. Além disso, se consideramos que o potencial é suave e que as colisões são raras, então as estrelas não pulam no espaço de fases, mas desclocam-se suavemente. Algumas integrais da função f tem interpretação física. Por exemplo

$$M = m \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} \quad (3.97)$$

é a massa total do sistema, onde m é a massa individual. A integral nas velocidades

$$\nu(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3.98)$$

é a densidade numérica de estrelas, de onde temos que a densidade de massa é

$$\rho(\mathbf{r}) = m\nu(\mathbf{r}). \quad (3.99)$$

Com relação às velocidades, a média da i -ésima componente de \mathbf{v} é

$$\overline{v_i}(\mathbf{r}) = \frac{\int v_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}} = \frac{1}{\nu(\mathbf{r})} \int v_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3.100)$$

e a média do produto de duas componentes é

$$\overline{v_i v_j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\nu(\mathbf{r})} \int v_i v_j f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.101)$$

Note que a dispersão pode ser escrita como

$$\sigma_{ij}^2 \equiv \overline{(v_i - \overline{v_i})(v_j - \overline{v_j})} = \overline{v_i v_j - v_i \overline{v_j} - v_j \overline{v_i} + \overline{v_i} \overline{v_j}} = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j} \quad (3.102)$$

logo, a média da Equação (3.101) pode ser escrita

$$\overline{v_i v_j} = \overline{v_i} \overline{v_j} + \sigma_{ij}^2. \quad (3.103)$$

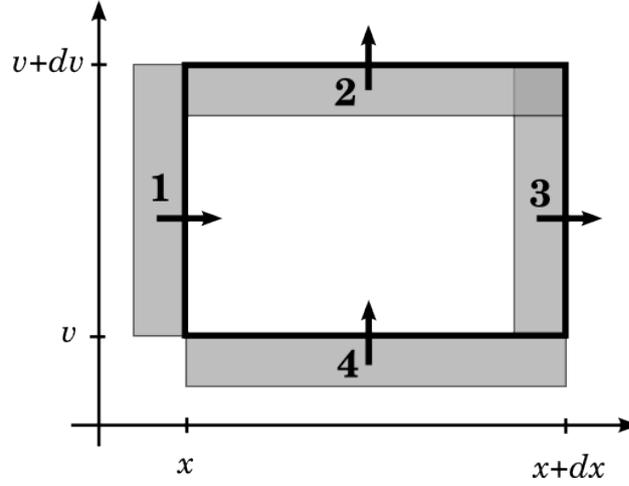


Figura 3.4: Mudanças num elemento de volume do espaço de fases.

Na prática estamos sempre condicionados a observar momentos da distribuição projetados no plano do céu, ou seja, sendo \mathbf{R} a coordenada no plano do céu, observamos a densidade de matéria ou de luminosidade projetada $\Sigma(\mathbf{R})$, a velocidade projetada na linha de visada (LOS) $v_{\text{LOS}}(\mathbf{R})$, a dispersão de velocidades na linha de visada $\sigma_{\text{LOS}}(\mathbf{R})$ e assim por diante.

3.4.2 Equação de Boltzmann

Vamos determinar como a função de distribuição evolui no espaço de fases. EM primeiro lugar, considere a Figura 3.4, que representa o espaço de fases do problema. O retângulo é um elemento de volume $dV = d\mathbf{r} dv$. Na direção x , temos o elemento **1** de largura $v_x dt$ e altura dv_x , assim o incremento em dV vale $f(x, v_x) v_x dv_x dt$. Da mesma forma, na região **3** o decremento da DF no dV é $f(x + dx, v_x) v_x dv_x dt$. Desta forma, o fluxo da DF na direção x em dt vale

$$[f(x + dx, v_x) - f(x, v_x)] v_x dv_x dt = \frac{\partial f}{\partial x} dx dv_x dt. \quad (3.104)$$

onde o lado direito da igualdade segue da definição da derivada parcial. Usando um raciocínio análogo, as regiões **2** e **4** tem largura dx e altura $(dv_x/dt) dt$. Assim o incremento em dV vale $f(x, v_x) dx (dv_x/dt) dt$, e o decremento vale $f(x, v_x + dv_x) dx (dv_x/dt) dt$. Assim o fluxo na direção v_x é

$$[f(x, v_x + dv_x) - f(x, v_x)] dx \frac{dv_x}{dt} dt = \frac{\partial f}{\partial v_x} dv_x dx dt. \quad (3.105)$$

A partir das Equações (3.104) e (3.105) podemos escrever o fluxo total na região, que corresponde à variação da DF no tempo, isto é

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx v_x dv_x dt + \frac{\partial f}{\partial v_x} dv_x dx \frac{dv_x}{dt} dt = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x dx dv_x dt, \quad (3.106)$$

isto é

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dv_x}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_x} = 0. \quad (3.107)$$

Generalizando para todas as coordenadas, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{dv_x}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{dv_y}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_y} + \frac{dv_z}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0, \quad (3.108)$$

que pode ser escrita de forma compacta em notação vetorial como

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}} = 0 \quad (3.109)$$

onde utilizamos o fato de que $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla \Phi$. A Equação (3.109) é a **Equação de Boltzmann sem colisões** (CBE), que determina a evolução de $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ determinada pelo potencial Φ .

Se notamos que a derivada total da f é exatamente a Equação (3.108), então a CBE pode ser escrita como

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (3.110)$$

que significa que a DF se comporta como se fosse um fluido incompressível no espaço de fases, ou seja, a densidade f ao longo de uma órbita é constante.

Note como fica a Equação de Boltzmann em coordenadas esféricas

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \dot{v}_r \frac{\partial f}{\partial v_r} + \dot{v}_\theta \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + \dot{v}_\varphi \frac{\partial f}{\partial v_\varphi}.$$

3.4.3 Equações de Jeans

Apesar de a Equação de Boltzmann conter toda a evolução da função de distribuição sujeita a um potencial, como sempre teremos observáveis que são projeções da f em algum subespaço do espaço de fases, é conveniente transformar a CDE numa equação escrita em termos de observáveis. Por exemplo, ao integrar a f obtemos ν , da mesma forma, se integrarmos a CBE,

que é uma equação para f , teremos uma equação para ν . Esquemáticamente

$$\begin{aligned} \text{(CBE)} &\rightarrow \text{eq. para } f \\ \int \text{(CBE)} d\mathbf{v} &\rightarrow \text{eq. para } \nu \\ \int \mathbf{v} \text{(CBE)} d\mathbf{v} &\rightarrow \text{eq. para } \bar{\mathbf{v}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Este conjunto de equações para integrais da f em diferentes subespaços são chamadas **Equações de Jeans**.

Momentum Zero da CDE

Escrevendo a CBE como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left[v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right] = 0, \quad (3.111)$$

integrando em todas as velocidades e notando que

$$\sum_i \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} = \int_V \nabla f \cdot d\mathbf{v} = \int_S f dS = 0. \quad (3.112)$$

As duas primeiras igualdades seguem pelo teorema da divergência. O termo final se anula porque a integral é feita no volume V no subespaço de velocidades, limitado pela superfície S . Como o volume V é arbitrário e $\lim_{v \rightarrow \infty} f = 0$, pois não existem estrelas ligadas ao sistema com velocidades excessivamente altas, podemos escolher V de modo que $f = 0$ ao longo de S , de modo que $\int_S f dS = 0$. Tirando das integrais os termos que não dependem de \mathbf{v} e usando as Equações (3.98) e (3.100), obtemos

$$\boxed{\frac{\partial \nu}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \bar{v}_i) = 0} \quad (3.113)$$

que a equação de continuidade para as estrelas⁶.

⁶Compare com o equivalente para um fluido, Equação de Euler:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

Primeiro Momentum da CBE

Procedendo da mesma maneira, agora multiplicando a Equação (3.111) por v_j e integrando em todas as velocidades obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int v_j f d\mathbf{v} + \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \int v_i v_j f d\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} \right] = 0. \quad (3.114)$$

O termo mais à esquerda é $\nu \bar{v}_j$, e o termo central é $\partial(\nu \bar{v}_i \bar{v}_j) / \partial x_i$. A integral do terceiro termo pode ser integrado por partes

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} = v_j f|_V - \int f \frac{\partial v_j}{\partial v_i} d\mathbf{v} = -\delta_{ij} \nu,$$

onde δ_{ij} é a delta de Kroenecker e $[v_j f]_V = 0$ escolhendo V tal que $f = 0$ sobre S , como na seção anterior. Assim, a equação (3.114) fica

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nu \bar{v}_j) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \bar{v}_i \bar{v}_j) + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (3.115)$$

Para escrevê-la em termos da dispersão e do potencial, multiplicamos a Equação (3.113) por \bar{v}_j e notamos que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nu \bar{v}_j) = \bar{v}_j \frac{\partial \nu}{\partial t} + \nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t},$$

obtendo assim

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nu \bar{v}_j) = -\bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \bar{v}_i) + \nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t}. \quad (3.116)$$

Substituindo este resultado em (3.114) teremos

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \sum_i \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \bar{v}_i) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \bar{v}_i \bar{v}_j) + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (3.117)$$

Usando a definição (3.103) podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \bar{v}_i \bar{v}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \sigma_{ij}^2) \\ &= \bar{v}_i \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu) + \nu \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \sigma_{ij}^2). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Finalmente, com os resultados (3.117) e (3.118) substituídos em (3.115) e eliminando os termos equivalentes teremos

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \sum_i \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \sigma_{ij}^2) \quad (3.119)$$

que usualmente é escrita assumindo-se a **convenção de soma de Einstein**⁷ como

$$\boxed{\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \sigma_{ij}^2)} \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.120)$$

Esta equação de Jeans diz que qualquer variação na velocidade (lado esquerdo da igualdade) é porque a velocidade varia com o tempo num mesmo ponto ($\partial \bar{v}_j / \partial t$) ou porque acompanhamos o fluxo ($\partial \bar{v}_j / \partial x_i$), e esta variação deve-se à forças oriundas de um gradiente de potencial ($\partial \Phi / \partial x_j$) ou de uma pressão anisotrópica ($\partial[\nu \sigma_{ij}^2] / \partial x_i$) devido à distribuição de velocidades estelares. Este é o **primeiro momentum** da equação de Boltzmann, a **equação de Jeans**.

O tensor de dispersão de velocidades σ_{ij}^2 faz o papel de uma pressão anisotrópica. Num fluido, a pressão é um escalar e portanto isotrópica. Em sistemas estelares, σ_{ij}^2 em geral é anisotrópico. Se σ_{ij}^2 é simétrico, os eixos σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} são os semieixos de elipsóide de velocidades.

Se $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ o sistema é isotrópico.

Compare com a segunda equação de Euler pra fluidos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

3.4.4 Teorema de Liouville

Baseado em Chandrasekhar, 1942

A equação de Boltzmann corresponde ao teorema de Liouville, obtido a partir das equações canônicas de movimento. Considere o Hamiltoniano $\mathcal{H}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N;)$ em termos das coordenadas generalizadas $\{\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\}$ para um sistema de N partículas. As equações de movimento são

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, 3N \quad (3.121)$$

Seja $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a função de distribuição deste sistema. Considere um elemento de volume $d\Gamma$ $3N$ -dimensional no espaço de fases limitado por $q_1, q_1 + dq_1, \dots, q_{3N}, q_{3N} + dq_{3N}, p_1, p_1 + dp_1, \dots, p_{3N}, p_{3N} + dp_{3N}$. Pense nas partículas cruzando a face p_i de área $d\Sigma = q_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_{3N}$. O acréscimo de partículas através desta face p_i é

$$(f \dot{p}_i d\Sigma)_{p_i}$$

⁷Índices repetidos num mesmo termo pressupõem soma.

e uma correspondente perda na face oposta

$$(f \dot{p}_i d\Sigma)_{p_i+dp_i}$$

Logo, o fluxo de partículas através deste par de faces é

$$(f \dot{p}_i d\Sigma)_{p_i+dp_i} - (f \dot{p}_i d\Sigma)_{p_i} = f \dot{p}_i dp_i d\Sigma = f \dot{p}_i d\Gamma$$

onde foi usada a igualdade $dp_i d\Sigma = d\Gamma$. Assim o aumento líquido entre este par de faces é

$$-\frac{\partial}{\partial p_i}(f \dot{p}_i) d\Gamma$$

Que pode ser lida como o aumento líquido (a variação do fluxo) de f no par de faces p_i . Se agora somamos em todos os $6N$ pares de faces, o aumento de $f d\Gamma$ devido ao movimento como um todo será

$$-\sum_{i=1}^{3N} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_i}(f \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i}(f \dot{q}_i) \right\} d\Gamma \quad (3.122)$$

que nos dá a razão do aumento de f no elemento de volume de fase $d\Gamma$ e assim corresponde à variação temporal de f . Portanto podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_i}(f \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i}(f \dot{q}_i) \right\} = 0$$

ou rearranjando os termos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left\{ \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \right\} = \sum_{i=1}^{3N} \left\{ \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right\} = 0 \quad (3.123)$$

onde o termo à direita se anula em virtude das equações de movimento

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

Reescrevendo o termo à esquerda da equação (3.123) com a ajuda das equações de movimento (3.121) temos o **teorema de Liouville**.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} = 0 \quad (3.124)$$

que corresponde exatamente ao resultado da equação de Boltzmann (?). Também é escrita como

$$\frac{Df}{Dt} = 0$$

onde D/Dt é o **operador de Stokes**

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left\{ \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right\} = 0$$

O significado do teorema de Liouville é que a densidade de qualquer elemento do espaço de fases mantém-se constante durante o movimento que obedece às equações de movimento (3.121).

3.4.5 Teorema do virial

Se multiplicamos a equação de Jeans

$$\frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (3.125)$$

por uma das coordenadas espaciais, x_k , e integramos em todo o espaço, temos

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} d\mathbf{x} = - \int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} d\mathbf{x} - \int \rho x_k \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} d\mathbf{x} \quad (3.126)$$

o último dos termos à direita é identificado como o **tensor energia potencial** W_{kj} . O primeiro termo à direita pode ser reescrito usando integração por partes

$$\begin{aligned} - \int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} d\mathbf{x} &= - \left[x_k \rho\bar{v}_i\bar{v}_j \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int \rho\bar{v}_i\bar{v}_j \frac{\partial x_k}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\ &= \int \rho\bar{v}_i\bar{v}_j \delta_{ik} d\mathbf{x} \\ &= \int \rho\bar{v}_k\bar{v}_j d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.127)$$

Onde usamos o fato de que $\rho(x \rightarrow \infty) = 0$ para eliminar o primeiro termo da integração por partes. Esta última quantidade identificamos como o **tensor energia cinética** K_{kj}

$$K_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho\bar{v}_j\bar{v}_k d\mathbf{x} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \quad (3.128)$$

Na definição acima, fica explícito que a energia cinética tem uma contribuição do movimento ordenado (T_{jk}) e do movimento aleatório (Π_{jk}). Se lembramos que $\bar{v}_j\bar{v}_k = \bar{v}_j \bar{v}_k - \sigma_{jk}^2$, segue a igualdade a partir da equação (3.128)

$$\begin{aligned} T_{jk} &\equiv \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d\mathbf{x} \\ \Pi_{jk} &\equiv \int \rho \sigma_{jk}^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.129)$$

Voltando ao lado esquerdo da equação (3.126), a derivação com relação ao tempo sai da integral pois as coordenadas não dependem implicitamente do tempo. Além disso, como temos a coma implícita em índices repetidos desde a equação de Jeans, podemos escrever

$$\rho x_k \bar{v}_j = \frac{1}{2} \rho (x_j \bar{v}_k + x_k \bar{v}_j) \quad (3.130)$$

deste modo a equação (3.126) é escrita como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho (x_j \bar{v}_k + x_k \bar{v}_j) d\mathbf{x} = K_{jk} + W_{jk} \quad (3.131)$$

Usando a definição do tensor momentum de inércia

$$I_{jk} \equiv \int \rho x_j x_k d\mathbf{x} \quad (3.132)$$

e derivando-o com relação ao tempo temos

$$\frac{\partial I_{jk}}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} x_j x_k d\mathbf{x} = - \int \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} x_j x_k d\mathbf{x} \quad (3.133)$$

onde foi usada a equação da continuidade de massa $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0$. Novamente, integrando por partes o termo mais à direita

$$\begin{aligned} - \int \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} x_j x_k d\mathbf{x} &= - \left[x_j x_k \rho \bar{v}_i \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int \rho \bar{v}_i \left[x_j \frac{\partial x_k}{\partial x_i} + x_k \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right] d\mathbf{x} \\ &= \int \rho \bar{v}_i (x_j \delta_{ik} + x_k \delta_{ij}) d\mathbf{x} \\ &= \int \rho (x_j \bar{v}_k + x_k \bar{v}_j) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.134)$$

Comparando o resultado das equações (3.133) e (3.134) com a equação (3.131), obtemos o **teorema do Virial na forma tensorial**

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2K_{jk} + W_{jk} \quad (3.135)$$

nas componentes ou usando a notação de tensores

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{I}}{dt^2} = 2\mathbf{K} + \mathbf{W} = 2\mathbf{T} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{W} \quad (3.136)$$

Fazendo o traço da equação acima temos, para o caso estacionário, a **equação do virial na forma escalar**

$$2K + W = 0$$

Apêndice A

Modelo auto-consistente de uma esfera lei-de-potência não singular

A.1 Densidade $\rho(r)$

Considere a esfera lei-de-potência singular definida por

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha. \quad (\text{A.1})$$

onde α é o grau da esfera, r_0 é o raio característico e $\rho_0 \equiv \rho(r_0)$ a densidade em tal raio. Para tais modelos, a massa total converge somente para $\alpha > 3$, quando a densidade decresce com o raio mais rapidamente do que o volume cresce. Além disso, a densidade central é indefinida.

É interessante o caso da esfera modificada (não-singular) de grau $\alpha = 4$

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r + r_0} \right)^4 = \frac{\rho_0}{(1 + r/r_0)^4} \quad (\text{A.2})$$

por ter massa total finita e ser definida em todo espaço. Neste caso, ρ_0 é a densidade central do modelo.

A.2 Perfil de massa

Massa acumulada A massa interior a um dado raio r' é escrita

$$M(r') = 4\pi \int_0^{r'} \rho(r) r^2 dr \quad (\text{A.3})$$

cuja resultado é para as esfera da Eq. (A.2)

$$M(r) = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho_0 \frac{r^3}{(r + r_0)^3} \quad (\text{A.4})$$

podemos reescrever a Eq. (A.4) como

$$M(r) = M_T \frac{r^3}{(r + r_0)^3} \quad (\text{A.5})$$

ou

$$\boxed{M(r) = \frac{M_T}{(1 + r_0/r)^3}} \quad (\text{A.6})$$

Massa total A massa total $M_T \equiv M(r \rightarrow \infty)$ é

$$M_T = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho_0 \quad (\text{A.7})$$

A massa total desta esfera é a mesma de uma esfera homogênea cujo raio de corte é r_0 e cuja densidade média é ρ_0 .

Massa interior a r_0 Além disso, a massa acumulada até o raio r_0 é

$$M(r_0) = \frac{4\pi}{24} r_0^3 \rho_0 = \frac{M_T}{8} \quad (\text{A.8})$$

Raio de meia massa Com os resultados anteriores, podemos imediatamente obter o raio que tem metade da massa, que é solução da equação $M(r_{1/2}) = M_T/2$. A partir das Eqs. (A.5) e (A.7), obtemos

$$r_{1/2} = \frac{r_0}{\sqrt[3]{2} - 1} \simeq 3.85 r_0 \quad (\text{A.9})$$

A.3 Potencial $\Phi(r)$

O potencial é dados pela solução da equação de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{4\pi G \rho_0}{(1 + r/r_0)^4} \quad (\text{A.10})$$

que resulta em

$$\Phi(r) = -\frac{2}{3} \pi r_0^4 \rho_0 G \frac{(2r_0 + 3r)}{r(r_0 + r)^2}. \quad (\text{A.11})$$

Se lembramos do resultado da massa total, Eq. (A.7), podemos escrever o potencial como

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{2} \frac{r_0(2r_0 + 3r)}{r(r_0 + r)^2}, \quad (\text{A.12})$$

ou ainda

$$\boxed{\Phi(r) = -GM \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r+r_0} + \frac{r_0}{2(r+r_0)^2} \right\}} \quad (\text{A.13})$$

A.4 Energia potencial W

A energia potencial W é escrita como o traço do tensor \mathbf{W}

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(r) \Phi(r) d^3\mathbf{r} = 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \Phi(r) r^2 dr \quad (\text{A.14})$$

substituindo-se $\rho(r)$ e $\Phi(r)$

$$W = -GM \pi \rho_0 r_0^5 \int_0^\infty \frac{(2r_0 + 3r)r}{(r_0 + r)^6} dr \quad (\text{A.15})$$

cujo resultado é

$$\boxed{W = -\frac{3}{20} \frac{GM^2}{r_0}} \quad (\text{A.16})$$

usando a Eq. (A.7).

A.5 Inversão de Abell para $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$

Escrevemos a densidade como a integral de $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ em todas as velocidades possíveis, isto é, desde a velocidade nula até a velocidade de escape $v_e = \sqrt{2|\Phi|}$

$$\rho(r) = 4\pi \int_0^{\sqrt{2|\Phi|}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) v^2 dv \quad (\text{A.17})$$

Numa distribuição esférica de matéria a função de distribuição é função somente da energia $f = f(E)$. Convém definir as quantidades auxiliares

$$\Psi \equiv -\Phi + \Phi_0 \quad (\text{A.18})$$

$$\varepsilon \equiv -E + \Phi_0 = \Psi - \frac{1}{2}v^2$$

Desta forma podemos reescrever a integral da Eq. (A.17) como

$$\rho(r) = 4\pi \int_0^\Psi f(\varepsilon) \sqrt{2(\Psi - \varepsilon)} d\varepsilon \quad (\text{A.19})$$

de acordo com a transformação de variáveis

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2[\Psi - \varepsilon]} & dv &= -(2[\Psi - \varepsilon])^{-3/2} d\varepsilon \\ v = 0 &\Rightarrow \varepsilon = \Psi \\ v = \sqrt{2\Psi} &\Rightarrow \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Como $\rho = \rho(r)$ e $\Psi = \Psi(r)$ continuamente, podemos escrever $\rho = \rho(\Psi)$ e assim temos que

$$\rho(\Psi) = 4\pi \int_0^\Psi f(\varepsilon) \sqrt{2(\Psi - \varepsilon)} d\varepsilon. \quad (\text{A.21})$$

Derivando com relação a Ψ obtemos

$$\frac{d\rho}{d\Psi} = \sqrt{8}\pi \int_0^\Psi \frac{f(\varepsilon)}{\sqrt{\Psi - \varepsilon}} d\varepsilon. \quad (\text{A.22})$$

que pode ser invertida usando a equação de Abell

$$\boxed{f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{8}} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{d\rho}{d\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{\Psi - \varepsilon}}} \quad (\text{A.23})$$

ou alternativamente

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{8}} \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{d^2\rho}{d\Psi^2} \frac{d\Psi}{\sqrt{\Psi - \varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\frac{d\rho}{d\Psi} \right]_{\Psi=0} \right\}. \quad (\text{A.24})$$

Para que $f(\varepsilon)$ seja fisicamente aceitável, a quantidade

$$\int_0^\varepsilon \frac{d\rho}{d\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{\Psi - \varepsilon}} \quad (\text{A.25})$$

deve ser uma função crescente de ε .

A.6 Formas adimensionais $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\Psi}$

É conveniente definir formas adimensionais para ρ e Ψ a fim de poder estabelecer uma relação entre estas quantidades. Portanto, definimos

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{(1 + r/r_0)^4} \quad (\text{A.26})$$

e da mesma forma

$$\tilde{\Psi} = \left[1 - \frac{1}{(1 + r_0/r)^2} \right] = \left[1 - \frac{(r/r_0)^2}{(1 + r/r_0)^2} \right] \quad (\text{A.27})$$

Se usamos a Eq. (A.26) para escrever

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_0} &= \frac{1}{\tilde{\rho}^{1/4}} - 1 \\ \tilde{\rho}^{1/2} &= \frac{1}{(1 + r/r_0)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

usamos a Eq. (A.27) para expressar a relação desejada

$$\boxed{\tilde{\rho} = \left[1 - \sqrt{1 - \tilde{\Psi}}\right]^4} \quad (\text{A.29})$$

cuja derivada é escrita como

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{\Psi}} = \frac{2 \left[1 - \sqrt{1 - \tilde{\Psi}}\right]^3}{\sqrt{1 - \tilde{\Psi}}}. \quad (\text{A.30})$$

A.7 Função de distribuição $f(\varepsilon)$

Reunindo os resultados anteriores podemos apresentar a integral da função de distribuição $f(\varepsilon)$

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\pi^2 \sqrt{8}} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{\left[1 - \sqrt{1 - \tilde{\Psi}}\right]^3}{\sqrt{1 - \tilde{\Psi}} \sqrt{\varepsilon - \tilde{\Psi}}} d\tilde{\Psi} \quad (\text{A.31})$$

A solução da equação acima é (Maple v.5)

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{8}} \left[4\sqrt{\varepsilon} + \frac{5 - 3\varepsilon}{\varepsilon - 1} + \frac{5}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + 3(\ln \Omega - \ln[\varepsilon - 1]) \right] \quad (\text{A.32})$$

onde definimos

$$\Omega \equiv -1 - \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}$$

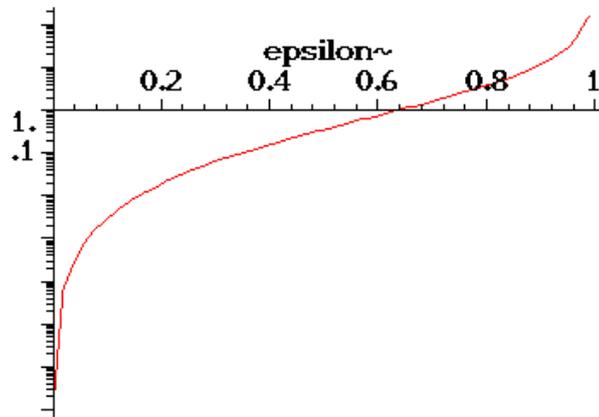


Figura A.1: $f(\varepsilon)$ é função crescente de ε

Apêndice B

Dinâmica de Fluidos

Adaptado de *Fluid Mechanics*, L. D. Landau, E. M. Lifshitz, 1959

B.1 Fluidos Ideais

Um fluido, líquido ou gás, é considerado como um sistema macroscópico e tratado como um meio contínuo. O estado de um fluido é completamente determinado pela campo de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ e quaisquer duas quantidades termodinâmicas pertinentes ao fluido, por exemplo a pressão $p(x, y, z, t)$ e a densidade $\rho(x, y, z, t)$.

Nas demonstrações que seguem, não consideraremos a dissipação de energia devido à fricção interna (viscosidade) e transferência de calor entre as diferentes partes do fluido. Assim, a discussão que segue é válida para o movimento de fluidos em que a condutividade térmica e a viscosidade não são importantes. Tais fluidos são ditos *ideais*.

B.2 Equação de continuidade

Considere um volume V_0 qualquer. A massa deste volume é $M = \int \rho dV_0$. O fluxo de massa por unidade de tempo através de um elemento ds da área que limita este volume é $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$. Como por convenção o vetor $d\mathbf{s}$ aponta pra fora da superfície, $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ é positivo se o fluido está saindo do volume e negativo se está entrando. A massa total de fluido saindo do volume por unidade de tempo é

$$\oint_s \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

onde a integração é realizada em toda a superfície que limita o volume V_0 .

Do mesmo modo, o decréscimo de massa no volume V_0 por unidade de tempo é

$$-\frac{dM}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$$

Igualando as duas expressões

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint_{\mathbf{s}} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

Podemos reescrever o lado direito usando o teorema da divergência de Gauss.

$$\oint_{\mathbf{s}} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

logo

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \right]$$

Como o volume é qualquer, o integrando deve ser nulo, isto é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{B.1})$$

que também pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (\text{B.2})$$

O vetor

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (\text{B.3})$$

é chamado de **densidade de fluxo de massa**. Sua direção é a do movimento do fluido enquanto seu módulo corresponde à massa fluindo por unidade de tempo através de uma unidade de área perpendicular ao movimento.

B.3 Equação de Euler

A força agindo em um volume de um fluido vale

$$\mathbf{F} = -\oint p d\mathbf{s}$$

integrada em toda a superfície que limita este volume. Usando o teorema de Gauss escrevemos

$$-\oint p \, ds = -\int \nabla p \, dV$$

Assim, vemos que um fluido envolvendo qualquer elemento de volume dV exerce neste elemento uma força $-dV \nabla p$; também podemos dizer que uma força $-\nabla p$ age num elemento unitário de volume do fluido.

Desta forma podemos escrever a equação de movimento para um elemento de volume do fluido igualando a força por unidade de volume $-\nabla p$ e o produto da massa por unidade de volume ρ e a aceleração $d\mathbf{v}/dt$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p \quad (\text{B.4})$$

A equação de movimento descreve a reação de uma partícula ($d\mathbf{v}/dt$) sujeita a uma força ($-\nabla p$). Assim, o termo $d\mathbf{v}/dt$ na Equação (B.4) deve ser entendido como a variação da velocidade de uma partícula ao longo de sua trajetória devido à força $-\nabla p$. A velocidade \mathbf{v} neste caso não deve ser confundida com o campo de velocidades $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ que especifica a velocidade do fluido em um ponto *fixo* do espaço em função do tempo. Esta derivada precisa ser escrita em termos de quantidades que se referem a pontos fixos no espaço.

Para fazer isso, notamos que a uma mudança $d\mathbf{v}$ na velocidade de uma dada partícula do fluido durante o tempo dt é composta de duas partes. A primeira parte é a mudança durante dt na velocidade em um ponto fixo no espaço, que vale

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt$$

onde a derivada $\partial \mathbf{v}/\partial t$ é avaliada num ponto fixo do espaço x, y, z .

A segunda é a diferença entre a velocidade de dois pontos distantes $d\mathbf{r}$ (no mesmo instante), onde $d\mathbf{r}$ é a distância percorrida pela partícula do fluido em dt . Esta parte é

$$dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

logo, a variação total da velocidade é

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

ou, dividindo os dois lados por dt ,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (d\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (\text{B.5})$$

que, substituindo na equação (B.4), resulta

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{B.6})$$

Esta é a equação de movimento de um fluido, ou equação de Euler (1755). No caso de o fluido estar na presença de um campo gravitacional, uma força $\rho \mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é a aceleração da gravidade, age em qualquer unidade de volume. Esta força deve ser somada ao lado direito da equação (B.4), assim escrevemos a equação (B.6) como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (\text{B.7})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Ciotti, L. 1991, A&A, **249**, 99
- [2] Dehnen, W. 1993, MNRAS, **265**, 250
- [3] Hernquist, L. 1990, ApJ, **356**, 359
- [4] Sersic 1968. Atlas de Galáxias Australes
- [5] Mazure, A., Capelato, H. 2002, A&A, **383**, 384
- [6] Lima Neto, G. B., Gerbal, D., Márquez, I., & Capelato, H. V. 1999, ASP Conf. Ser. 182: Galaxy Dynamics - A Rutgers Symposium, 211.
- [7] Chandrasekhar 1942
- [8] Chandrasekhar 1969
- [9] Landau & Lifshitz, Fluidos
Binney, J., Tremaine, S. 1987, *Galactic Dynamics*. Princeton: Princeton University Press.
Binney, J. 1982, ARA&A, **20**, 399-429
Chandrasekhar, S. 1942, *Principles of Stellar Dynamics*. New York: Dover Publications
Chandrasekhar, S. 1969, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. New York: Dover Publications
I.A.U. Symp. 127, *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, ed. Tim de Zeeuw (Dordrecht: Reidel)
Zeeuw, T., Franx, M. 1991, ARA&A, **29**, 239-274

- [10] Weisstein, Eric W. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GreensIdentities.html>