Introdução a Cosmologia

Uma visão contemporânea

Fabricio Ferrari
www.ferrari.pro.br

2019

IMEF – FURG

Disclaimer

Este conjunto de slides tem fim e objetivos educativos. É vedado o seu uso sem autorização. É vedado o seu uso comercial. São utilizadas idéias, equações, figuras e imagens de várias fontes; nem todos os direitos autorais são reconhecidos porque nem sempre estão explícitos. Se alguém for lesado, comunique e modificarei de acordo.

This set of slides have educational objectives and goals. Unauthorized use is forbidden. Commercial use is forbidden. Ideas, equations, figures and images from various sources are used; not all copyrights are acknowledged because they are not always explicit. If anyone is impaired, make contact and I'll modify it accordingly.

Conteúdo

Introdução Histórica

Cosmologia Neolítica [1]

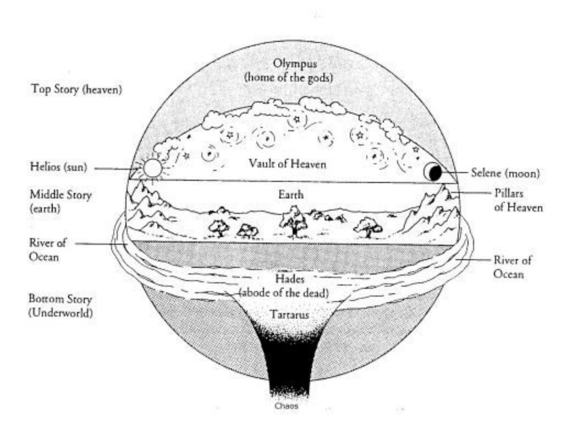
Figure 1: Lascaux, França, 15 000 AC

Cosmologia Neolítica [2]

Figure 2: Cromeleque dos Almendres, Portugal; 6000 AC

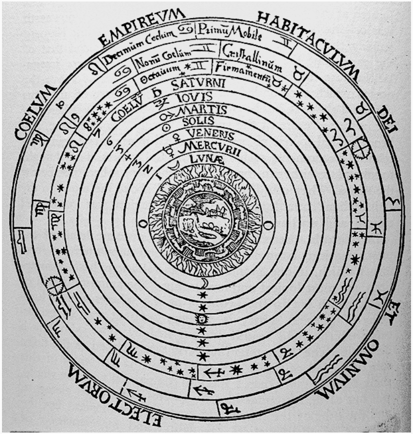
Grécia [1]

Pitágoras, Aristóteles, Ptolomeu → geocentrismo.



Cosmologia Grega Antiga, circa 400 AC

Grécia [2]



The Christian Aristotelian cosmos, engraving from Peter Apian's Cosmographia, 1524

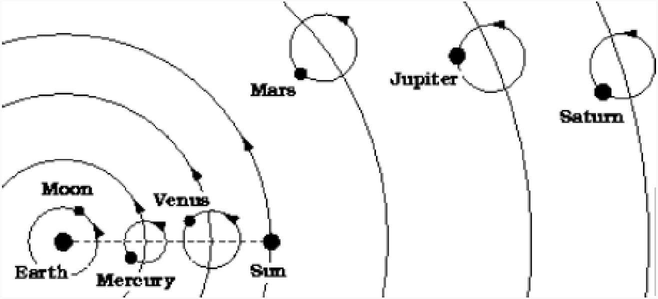
Grécia [3]

500 BC - 300 BC Pythagoras believed the earth was in motion and had knowledge of the periodic numerical relations of the planets, moon, and sun. The Earth was unique because of its central position and its material composition.

Grécia [4]

300 BC - 210 BC - Aristarchus of Samos. The first person to propose a scientific heliocentric model of the Solar System

200 AD - The Ptolemaic system. Ptolemy proposes an Earth centered Universe, with the Sun and planets revolving around the Earth. Perfect motion should be in circles, so the stars and planets, being heavenly objects, moved in circles and epicycles.



epiciclos de Ptolomeu

Renascimento/Revolução Científica [1]

1401 - 1464 **Nicholas de Cusa** suggests that the Earth is a nearly spherical shape that revolves around the Sun, and that each star is itself a distant sun.

1543 - **Copernicus** proposes a Sun-centered Universe

Renascimento/Revolução Científica [2]

1576 - **Thomas Digges** modifies the Copernican system - proposing a multitude of stars extending to infinity. Postulates the Olber's Paradox for the first time.

1584 - **Giordano Bruno** proposes a non-hierarchical cosmology, wherein the Copernican solar system is not the Centrex of the universe, but rather, a relatively insignificant star system, amongst an infinite multitude of others (God had no particular relation to one part of the infinite universe more than any other). A universe which, like that of Plotinus in the third century A.D., or Blaise Pascal's nearly a century after Bruno, had its center everywhere and its circumference nowhere.

1600 - **Tycho Brahe** realised that if the Earth was moving about the Sun, then the relative positions of the stars should change as viewed from different parts of the Earth's orbit. But there was no evidence of this shift, called parallax. Either the Earth was fixed, or else the stars would have to be fantastically far away.

Tycho himself was not a Copernican, but proposed a system in which the planets other than Earth orbited the Sun while the Sun orbited the Earth.

Renascimento/Revolução Científica [5]

1609 - **Johannes Kepler** uses the dark night sky to argue for a finite universe. Kepler discovered the key to building a heliocentric model. The planets moved in ellipses, not perfect circles, about the Sun - known as the Laws of planetary motion.

Newton later showed that elliptical motion could be explained by his inverse-square law for the gravitational force.

1609 - Galileo Galilei observes moons of Jupiter in support of the heliocentric model.

Renascimento/Revolução Científica [7]

1687 - **Newton**: Laws of motion, law of universal gravitation, basis for classical physics

Iluminismo [1]

1720 - **Edmund Halley** puts forth an early form of Olbers' paradox

1744 - **Jean-Philippe de Cheseaux** puts forth an early correct formulation of the Olbers' paradox

Iluminismo [2]

1791 - **Erasmus Darwin** pens the first description of a cyclical expanding and contracting universe.

1826 - **Heinrich Wilhelm Olbers** puts forth Olbers' paradox

1848 - **Edgar Allan Poe** offers a solution to Olbers' paradox in an essay that also suggests the expansion and collapse of the universe.

1838 - The astronomer and mathematician **Friedrich Bessel** measured the distance to the stars by parallax. 61 Cygni has 0.314 arcsec of parallax $\rightarrow$ 10.3 ly away (9.6% error).

Tempos Modernos [1]

1905 - **Albert Einstein** publishes the Special Theory of Relativity.

1915 - **Albert Einstein** publishes the **General Theory of Relativity** which requires a finite spherical universe (it cannot be infinite because of Mach's Principle, that the mass of a body is finite, is determined by all other matter in the universe, thus all other matter in universe must be finite). What then surrounds this finite spherical universe? Einstein used his spherical ellipsoidal geometry of General Relativity to propose curved space. What stops finite spherical universe gravitationally collapsing? Einstein proposed his Cosmological / Antigravity Constant.

1922 - **Friedmann** realised that Einstein equations could describe an expanding universe.

Tempos Modernos [2]

1929 - **Edwin Hubble** established that some nebulae (fuzzy patches of light on the night sky) were indeed distant galaxies comparable in size to our own Milky Way.

Tempos Modernos [3]

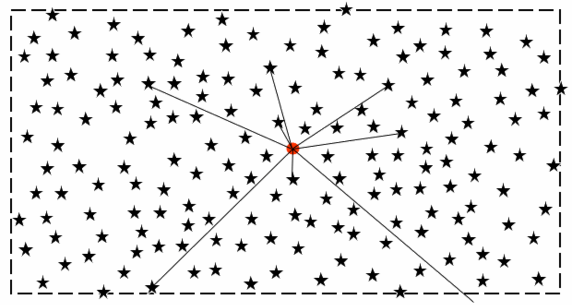
1950 - **Fred Hoyle** dismissively coins the phrase "Big Bang", and the name stuck. i.e. the Universe had been born at one moment, about ten thousand million years ago in the past and the galaxies were still travelling away from us after that initial burst. All the matter, indeed the Universe itself, was created at just one instant.

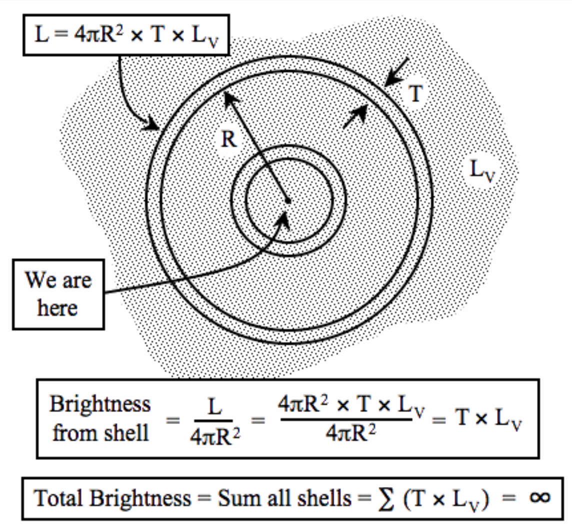
Tempos Modernos [4]

1965 - **Penzias and Wilson** discovered a cosmic microwave background radiation. This was interpreted as the faint afterglow of the intense radiation of a Hot Big Bang, which had been predicted by Alpher and Hermann back in 1949.

O paradoxo de Olbers [1]

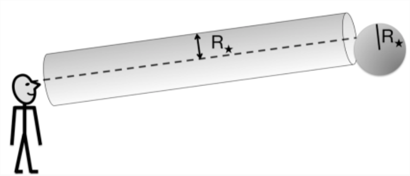
Por que o céu é escuro?
Linha de visada em qualquer direção eventualmente encontrará um estrela.





L = 4πR² × T × L_V
T
R
L_V
We are here
Brightness from shell = L / 4πR² = 4πR² × T × L_V / 4πR² = T × L_V
Total Brightness = Sum all shells = ∑ (T × L_V) = ∞

O paradoxo de Olbers [3]



Linha de visada:
cilindro comprimento λ e raio $R_\star$

O paradoxo de Olbers [4]

Estrelas no cilindro: $N = n_\star V = n_\star \lambda \pi R_\star^2$

Distância para que 1 estrela seja encontrada (N=1)

$$\lambda = \frac{1}{n_\star \pi R_\star^2}$$

$n_\star \sim 10^9$ Mpc $\qquad R_\star = R_\odot = 7\,10^8$ m $= 2.3\,10^{-8}$ pc

$$\boxed{\lambda \sim 10^{18} \text{ Mpc}}$$

se o Universo tiver pelo menos este tamanho, o céu será claro,
pois haverá um estrela em cada linha de visada.

O paradoxo de Olbers [5]

Soluções para o paradoxo:

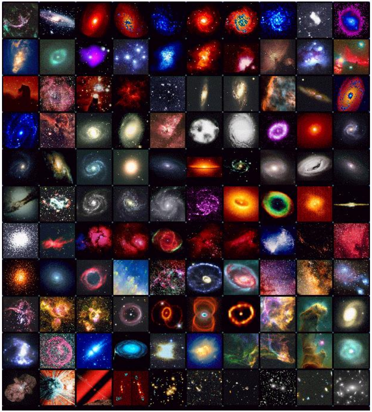
- As estrelas não são como o Sol
- Absorção da radiação (mas e o equilíbrio térmico e reemissão)
- O Universo não é infinitamente grande $\lambda < 10^{18}$ Mpc
- O Universo não e infinitamente antigo $ct < 10^{18}$ Mpc **(sim!!!)**

O Grande Debate Shapley-Curtis - 1920 [1]

26 Abril 1920, Smithsonian Museum of Natural History

Messier Catalog

Catalogue des Nébuleuses et des Amas d'Étoiles , 1771



Argumentos de Harlow Shapley

- Via-Láctea é o Universo todo (300 000 anos luz de diametro)
- "nebulosas" espirais são parte da Via-Láctea
- p.ex. se Andrômeda não é parte da Via-Láctea,
  deve estar a 10^8 anos-luz – inaceitável
- Adriaan van Maanen observou a rotação da M101 (!!!)
- Observação de nova em Andrômeda com bilho superior a toda Andrômemda.

O Grande Debate Shapley-Curtis - 1920 [3]

Argumentos de Heber Curtis

- Andrômeda era um universo-ilha
- havia mais novas em Andrômeda que na Via-Láctea
- nuvens de poeira em Andrômeda
- espectros semelhantes entre ”nebulosas” e Via-Láctea

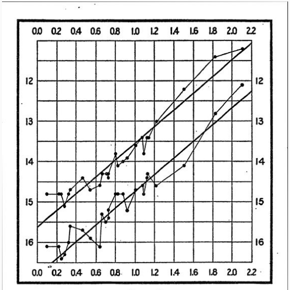
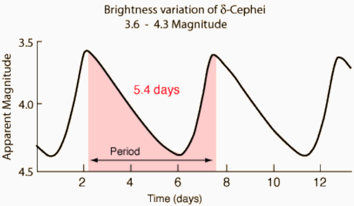
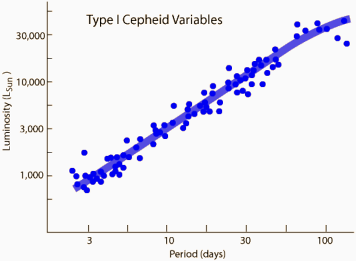
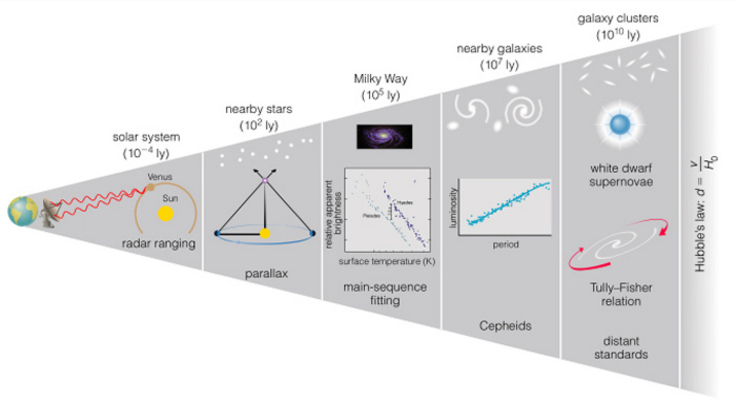


Fig. 2.

Grafico Original Henrietta Leavitt 1912

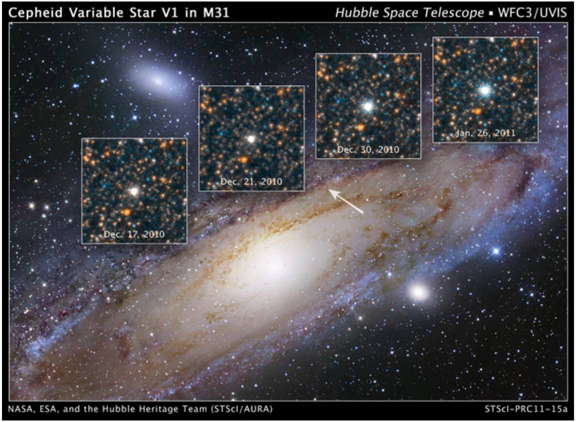






galaxy clusters
(10^10 ly)
nearby galaxies
(10^7 ly)
Milky Way
(10^5 ly)
nearby stars
(10^2 ly)
solar system
(10^−4 ly)
Venus
Sun
radar ranging
parallax
relative apparent brightness
surface temperature (K)
main-sequence fitting
luminosity
period
Cepheids
white dwarf supernovae
Tully–Fisher relation
distant standards
Hubble's law: $d = \frac{v}{H_0}$

Distância de Andrômeda – Edwin Hubble [1]



Andrômeda: 750 kpc $\simeq$ 2.5 Mly

(Via-Láctea $\rightarrow$ diâmetro 50 kpc   Sistema Solar $\rightarrow$ 5 horas-luz)

Universos Ilha – Galáxias

Vesto Slipher (Lowell Observatory) 1912

additional nebula N.G.C. [illegible] has been observed by Pease, who found a large receding velocity but gave no numerical estimate.

RADIAL VELOCITIES OF SPIRAL NEBULAE

+ indicates receding, − approaching

N.G.C.	R.A. h m	Dec. ° ′	Rad. Vel. km. per sec.	N.G.C.	R.A. h m	Dec. ° ′	Rad. Vel. km. per sec
221	0 38	+40 26	− 300	4151*	12 6	+39 51	+ 980
224*	0 38	+40 50	− 300	4214	12 12	+36 46	+ 300
278†	0 47	+47 7	+ 650	4258	12 15	+47 45	+ 500
404	1 5	+35 17	− 25	4382†	12 21	+18 38	+ 500
584†	1 27	− 7 17	+1800	4449	12 24	+44 32	+ 200
598*	1 29	+30 15	− 260	4472	12 25	+ 8 27	+ 850
936	2 24	− 1 31	+1300	4486†	12 27	+12 50	+ 800
1023	2 35	+38 43	+ 300	4526	12 30	+ 8 9	+ 580
1068*	2 39	− 0 21	+1120	4565†	12 32	+26 26	+1100
2683	8 48	+33 43	+ 400	4594*	12 36	−11 11	+1100
2841†	9 16	+51 19	+ 600	4649	12 40	+12 0	+1090
3031	9 49	+69 27	− 30	4736	12 47	+41 33	+ 290
3034	9 49	+70 5	+ 290	4826	12 53	+22 7	+ 150
3115†	10 1	− 7 20	+ 600	5005	13 7	+37 29	+ 900
3368	10 42	+12 14	+ 940	5055	13 12	+42 37	+ 450
3379*	10 43	+13 0	+ 780	5194	13 26	+47 36	+ 270
3489†	10 56	+14 20	+ 600	5195†	13 27	+47 41	+ 240
3521	11 2	+ 0 24	+ 730	5236†	13 32	−29 27	+ 500
3623	11 15	+13 32	+ 800	5866	15 4	+56 4	+ 650
3627	11 16	+13 26	+ 650	7331	22 33	+33 23	+ 500
4111†	12 3	+43 31	+ 800				

The great preponderance of positive (receding) velocities is very striking; but the lack of observations of southern nebulae is unfortunate, and forbids a final conclusion. [illegible]

Georges Lemaitre 1927

Lemaître, G. (April 1927). "Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques". Annales de la Société Scientifique de Bruxelles (in French). 47: 49. Bibcode:1927ASSB...47...49L.

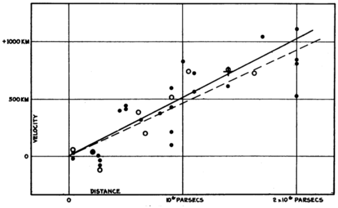
"Hypothesis of the Primeval Atom"

Lei de Hubble(-Lemaitre)

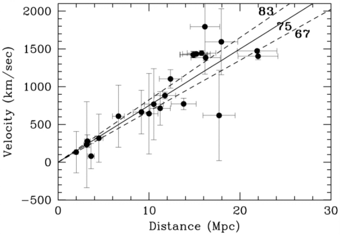
Estimativa da constante de Hubble

Edwin Hubble 1929

Hubble, Edwin (1929). "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae". PNAS. 15 (3): 168–173. Bibcode:1929PNAS...15..168H. doi:10.1073/pnas.15.3.168. PMC 522427. PMID 16577160.

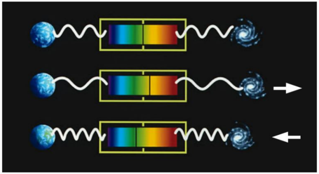


Hubble 1929



Freedman et al. 2001

$$H_0 = 68 \pm 2 \text{ km/s/Mpc}$$



Redshift

$$z = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$$

$$z \approx \frac{v}{c} \qquad \text{não relativístico}$$

Hubble-Lemaitre

$$\boxed{v = H_0 \, r}$$

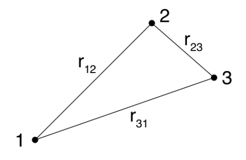
$$z = \frac{H_0}{c} \, r$$

Unidades

$$[H_0] = \frac{L/T}{L} = T^{-1}$$

$$H_0 = 68 \, \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 3.24 \, 10^{-20} s^{-1}$$

Lei de Hubble-Lemaitre



$$\mathbf{r}_{ij}(t) \equiv |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

$$r_{12}(t) = a(t)\ r_{12}(t_0)$$
$$r_{23}(t) = a(t)\ r_{23}(t_0)$$
$$r_{31}(t) = a(t)\ r_{31}(t_0)$$

$$v_{12}(t) = \frac{d\,r_{12}}{dt} = \dot{a}\ r_{12}(t) = \frac{\dot{a}}{a}\ r_{12}(t)$$

em geral

$$v_{ij}(t) = \frac{d\,r_{ij}}{dt} = \dot{a}\ r_{ij}(t) = \frac{\dot{a}}{a}\ r_{ij}(t)$$

Lei de Hubble-Lemaitre

$$v(t) = \frac{\dot{a}}{a}\ r(t) \qquad v = H_0\ r$$

$$\boxed{H = \frac{\dot{a}}{a}}$$ Parâmetro de Hubble

$$\boxed{t_0 = \frac{r}{v} = \frac{1}{H_0}}$$ Tempo de Hubble

$$\boxed{\frac{c}{H_0}}$$ Hubble distance

$$H_0 = 68\ \mathrm{kms}^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1} \qquad \rightarrow \qquad t_0 = 14.38\ \mathrm{Gyr}, \qquad \frac{c}{H_0} = 4380\ \mathrm{Mpc}\ (Olber?)$$

Modelos de Universo - Steady State

Fred Hoyle, Hermann Bondi, Thomas Gold, 1940s

Princípio Cosmológico Perfeito:

- posição **não** privilegiada no espaço e no tempo
- ρ_0 e H_0 constantes sempre

$$v = H_0\ r \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dr} = H_0\ r \quad \Rightarrow \quad \boxed{r(t) \propto e^{H_0 t}}$$

$r \to 0$ sse $t \to -\infty$ **Eterno**

Criação de Matéria

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \propto e^{3H_0 t}$$

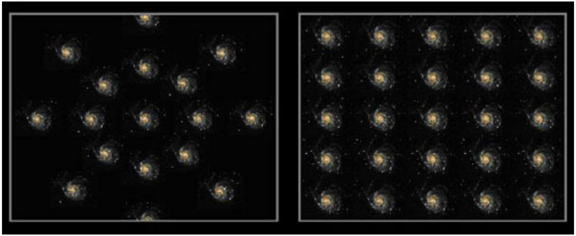
$$\dot{M} = \rho_0 \dot{V} = \rho_0 3 H_0 V$$

$$\frac{\dot{M}}{V} = 3 H_0 \rho_0$$

$$\rho_0 \approx 2.7\ 10^{-27}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$$

$$\frac{\dot{M}}{V}\ \approx\ 5.6 \times 10^{-28}\ \mathrm{kg\,m^{-3}\,Gyr^{-1}}\ \approx\ 1\ \mathrm{Hydrogen/Km^3/year}$$

Princípio Cosmológico



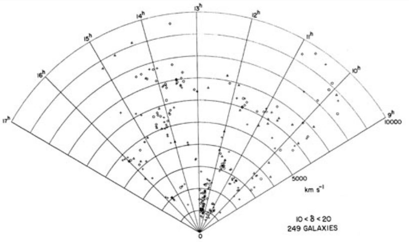
isotropico **homogêneo**

O Universo é isotrópico e homogêneo em larga escala ($>$ 100 Mpc)

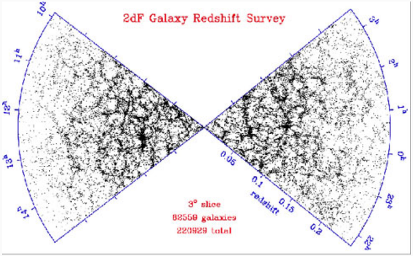
Não há posição privilegiada no Universo

Distribuição Espacial de Galáxias

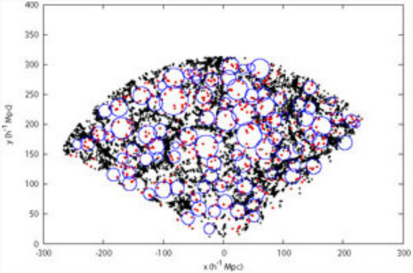
The Large-Scale Structure of the Universe Coil, Alison L., DOI 10.1007/978-94-007-5609-0_8



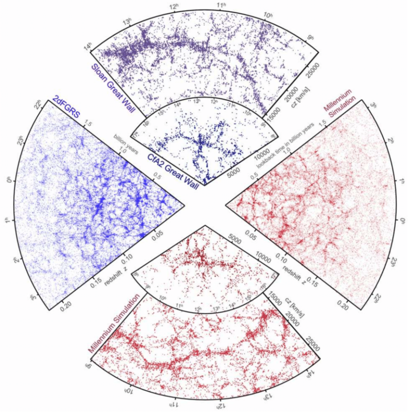
Distribution of galaxies in redshift space from the original CfA galaxy redshift survey (from Davis et al. 1982). Plotted are 249 galaxies as a function of observed velocity

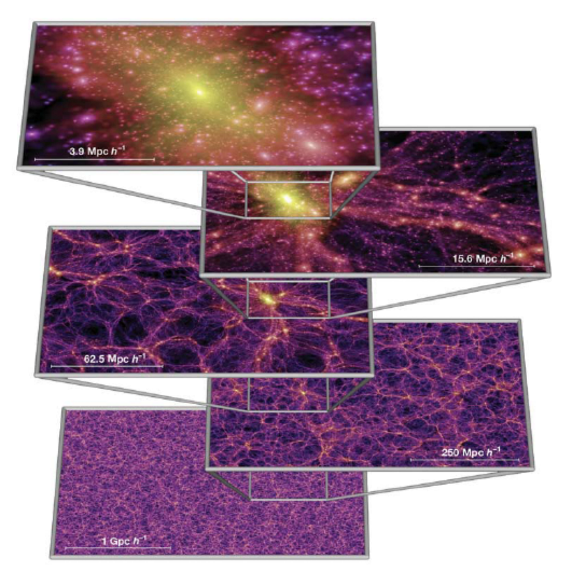


The spatial distribution of galaxies as a function of redshift and right ascension (projected through 3° in declination) from the 2dF Galaxy Redshift Survey (from Colless et al. 2004).



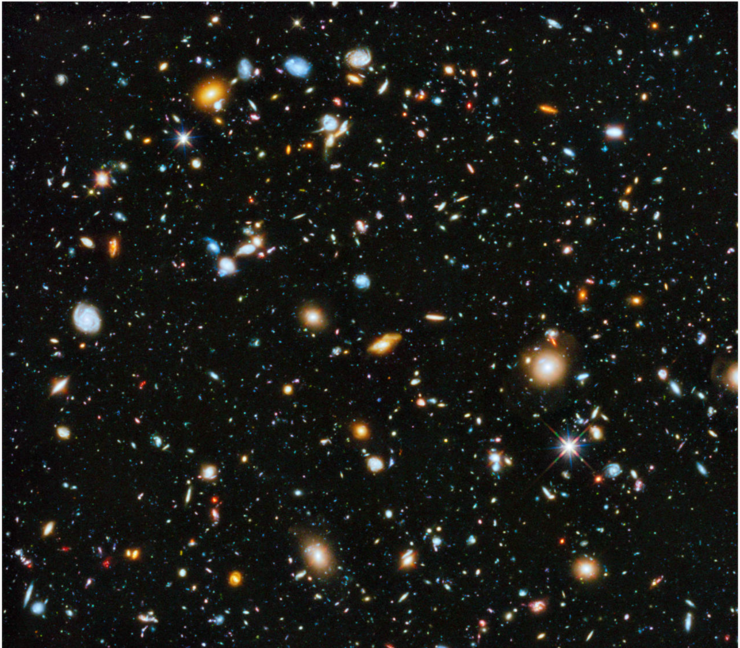
Void and wall galaxies in the SDSS. Shown is a projection of a 10 h-1 Mpc slab with wall galaxies plotted as black crosses and void galaxies plotted as red crosses. Blue circles indicate the intersection of the maximal sphere of each void with the midplane of the slab (from Pan et al. 2011).





Springel et al. 2005, "Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars," Nature, 435, 7042, 629.

Hubble Deep Field



Cosmologia Newtoniana

Gravidade e Inércia

$$F = -\frac{G\ M_g\ m_g}{r^2} \qquad \mathbf{F} = -\frac{G M_g m_g}{r^3}\mathbf{r}$$

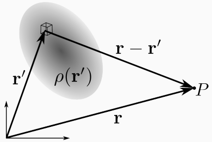
$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$$

$m_g = m_i$? sim por 10^{13}

$$a = -\frac{G M_g}{r^2}\left(\frac{m_g}{m_i}\right)$$

O Campo Gravitacional (em 1 minuto)

Ver documento Dinâmica de Sistemas Esferoidais em www.ferrari.pro.br->research para maiores detalhes



$$\delta\mathbf{g}(\mathbf{r}) = G\ \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\delta m(\mathbf{r}') = G\ \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\delta\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = G\int\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\ \rho(\mathbf{r})\ d\mathbf{r}'$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|^3}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = G\ \nabla_{\mathbf{r}}\int\frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ d\mathbf{r}'$$

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv -\ G\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$$

$$\nabla\mathbf{g}(\mathbf{r}) = G\int\nabla\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|^3}\right)\ \rho(\mathbf{r})\ d\mathbf{r}' \qquad (1)$$

$$\nabla\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|^3}\right) = -\frac{-3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} = 0$$

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -G\rho(\mathbf{r})\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\leqslant h}\nabla'\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|^3}\right)\ d\mathbf{r}' \\ &= -G\rho(\mathbf{r})\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=h}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|^3}\right)d\mathbf{S}'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -G\rho(\mathbf{r})\int\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|^3}\ h\ d\Omega \\ &= -G\rho(\mathbf{r})\int d\Omega = 4\pi G\rho(\mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -\nabla\mathbf{g} = -4\pi G\rho(\mathbf{r})}$$

Universo finito:
$\Rightarrow$ observadores no limite observam distribuição de matéria nao homogênea

Universo infinito:
$\Rightarrow$ campo gravitacional interno é nulo $\Rightarrow$ pela Eq. Poisson $\Rightarrow$ massa nula

Teorema de Birkhoff (Relatividade Geral): somente a massa interior a um raio r especifica o campo num ponto exterior a esta.

Densidade Crítica

Galáxia de massa m exterior a uma esfera de massa M

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3$$

Expansão determinada pela energia total (onde $v = H_0 r$)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E_0 = \text{constante} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} E_0 > 0 \quad &\rightarrow \quad \text{aberto} \\ E_0 = 0 \quad &\rightarrow \quad \text{crítico} \\ E_0 < 0 \quad &\rightarrow \quad \text{fechado} \end{aligned}$$

Densidade Crítica $E_0 = 0$. A partir da Eq. 2

$$\frac{1}{2}H_0^2 r^2 - \frac{4\pi G r^3}{3r}\rho_c = 0$$

$$\boxed{\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}} \qquad \text{densidade crítica}$$

Relatividade Especial

Relatividade Especial ou Restrita

- Sem massa
- Sem gravidade
- Espaço plano

Postulados:

1. As equações que descrevem os fenômenos básicos da natureza são as mesmas em qualquer referencial inercial

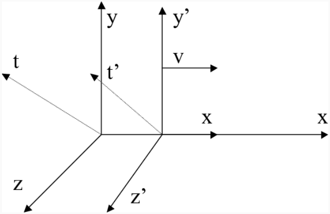
2. A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais

Motivação
Invariância das Equações de Maxwell
Experimento de Michelson-Morley
Transformação (matemática) de Lorentz

Transformação de Lorentz

Casca esférica de luz que se expande a partir das origens $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ quando coincidem

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{3}$$
$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$



Equações (3) são compatíveis com **Transformação de Lorentz**

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Espaço e Tempo Relativos

Evento 1 acontece em t_1 e (x_1, y_1, z_1)

Evento 2 acontece em t_2 e (x_2, y_2, z_2)

Distância entre eventos em $\mathcal{O}$:

$$(\Delta l)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$
$$\Delta t = (t_1 - t_2)$$

No referencial $\mathcal{O}'$

$$(\Delta l')^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2$$
$$\gamma^2[x_1 - x_2 - v(t_1 - t_2)]^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \tag{4}$$
$$\Delta t' = (t_1' - t_2')$$
$$= \gamma \left[t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)\right] \tag{5}$$

$\boxed{\Delta l \neq \Delta l'}$ $\boxed{\Delta t \neq \Delta t'}$!!!!!!!!!

Voltando às Eqs (4) e (5) NOTAÇÃO: $\Delta x^2 \equiv (\Delta x)^2$
e assumindo

$$y_1 = y_2 = y_1' = y_2' = z_1 = z_2 = z_1' = z_2' = 0 \qquad \text{por simplicidade}$$

Temos

$$(\Delta l')^2 = \gamma^2[\Delta x - v\Delta t]^2 \qquad = \gamma^2\left[\Delta x^2 - 2v\Delta x\Delta t + v^2\Delta t^2\right]$$

$$\Delta t'^2 = \gamma^2\left[\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right]^2 \qquad = \gamma^2\left[\Delta t^2 - \frac{2v}{c^2}\Delta x\Delta t + \frac{v^2}{c^4}\Delta x^2\right]$$

assim, fazendo

$$\begin{aligned}
\Delta l'^2 - c^2\Delta t'^2 &= \gamma^2\left[\Delta x^2 - \cancel{2v\Delta x\Delta t} + v^2\Delta t^2 - c^2\Delta t^2 + \cancel{2v\Delta x\Delta t} - \frac{v^2}{c^2}\Delta x^2\right] \\
&= \gamma^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta x^2 + (v^2 - c^2)\Delta t^2\right] \\
&= \gamma^2\left[\frac{1}{\gamma^2}\Delta x^2 + \frac{c^2}{\gamma^2}\Delta t^2\right]
\end{aligned}$$

$$\Delta l'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta l^2 - c^2\Delta t^2$$

$$\Delta l'^2 - c^2 \Delta t'^2 = \Delta l^2 - c^2 \Delta t^2$$

$$\begin{aligned} \Delta S &\equiv \Delta l^2 - c^2 \Delta t^2 \\ \Delta S' &\equiv \Delta l'^2 - c^2 \Delta t'^2 \end{aligned}$$

$$\Delta l^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

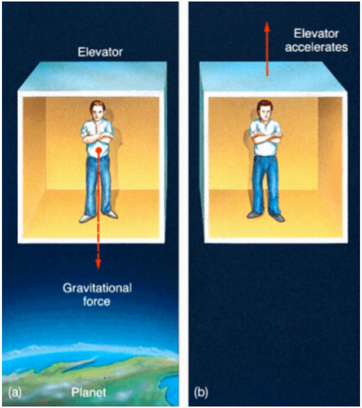
$$\boxed{\Delta S \qquad \text{é invariante de Lorentz}}$$

A separação espaço-tempo é invariante frente à transformação de Lorentz.

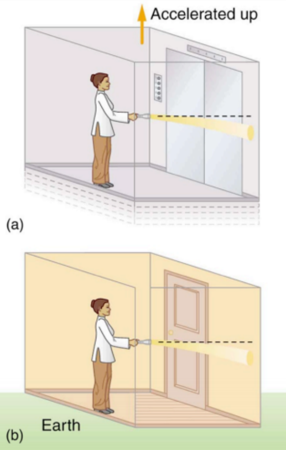
Δl é invariante frente à transformação de Galileu.

Relatividade Geral

Princípio de Equivalência



aceleração causada pelo movimento da caixa ou pelo campo gravitacional são indistinguíveis



se movimento da caixa causa deflexão de um feixe de luz, a gravidade também causa

No quarto na presença do campo gravitacional da Terra

- O feixe de luz está seguindo a distância de menor tempo entre dois pontos (Princípio de Fermat da Ótica)
- Se a trajetória não é uma linha reta $\Rightarrow$ o espaço não é plano (não-Euclideano)
- A gravidade (massa) está afetando a curvatura do espaço
- A luz segue uma geodésica (trajetória de menor distância) entre dois pontos num espaço curvo.

Newton & Einstein

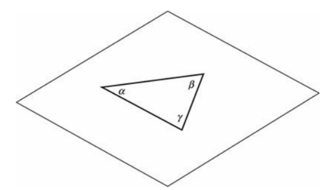
Newton

Massa exerve força da gravidade ($F = -GMm/r^2$)
Força determina a aceleração ($F = ma$)

Einstein

Massa e energia curvam o espaço-tempo
Espaço-tempo determina o movimento da massa e energia

Espaço Euclideano (plano)
– Triângulo



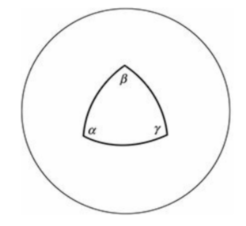
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

– Distância entre pontos
(x, y) e $(x + dx, y + dy)$

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2$$

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \qquad \text{métrica}$$

Espaço Curvo (positivamente)
– Triângulo
de área A sobre esfera de raio R



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$$

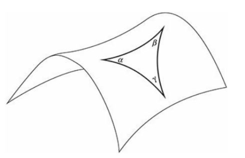
– Distância entre pontos
(r, θ) e $(r + dr, \theta + d\theta)$

$$d\ell^2 = dr^2 + R^2 \sin^2(r/R)\; d\theta^2 \qquad \text{métrica}$$

Espaço Curvo (negativamente)

– Triângulo

de área A sobre hiperbolóide com raio de curvatura R



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{A}{R^2}$$

– Distância entre pontos (r, θ) e $(r + dr, \theta + d\theta)$

$$d\ell^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(r/R)\ d\theta^2 \qquad \text{métrica}$$

Métrica Sobre a Esfera Imersa no Espaço 3D plano

Equação da Esfera

$$r^2 + z^2 = R^2$$

Movendo-se na superfície da esfera temos

$$zdz = -rdr \qquad \text{e} \qquad dz^2 = \frac{r^2}{z^2}dr^2$$

Métrica Euclideana fica

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + \frac{r^2}{z^2}dr^2 \\ &= \left(1 + \frac{r^2}{z^2}\right) dr^2 + r^2 d\theta \end{aligned}$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}\right) dr^2 + r^2 d\theta$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{dr^2}{1 - (r/R)^2} + r^2 d\theta}$$

Métrica no Espaço 3D Curvo[1] [1]

Espaço não plano

$$ds^2 \neq dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \tag{6}$$

a geometria do espaço pode ser representada então (Pitágoras)

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \text{constante}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \frac{1}{\kappa} R^2 \qquad \kappa \equiv \pm 1 \qquad \text{sinal e raio de curvatura} \tag{7}$$

$$xdx + ydy + zdz + wdw = 0 \qquad \Rightarrow \qquad dw = -\frac{xdx + ydy + zdz}{w} \tag{8}$$

Substituindo Eq. (7) em (8) e usando na (6)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{xdx + ydy + zdz}{\kappa^{-1} R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Métrica no Espaço 3D Curvo[2] [2]

Utilizando coordenadas esféricas

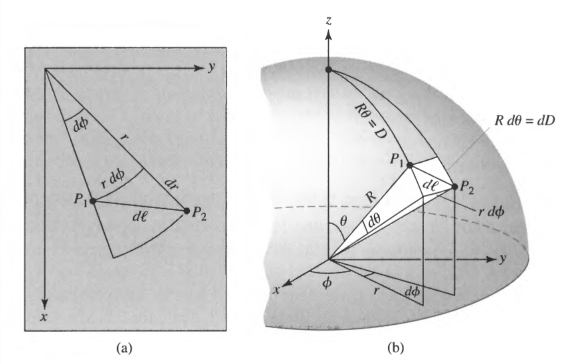
$$x = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

obtem-se

$$\boxed{ds^2 = \frac{dr^2}{1-\kappa\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2}$$

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\kappa\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\Omega^2 \qquad (d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \qquad \text{termo angular })$$

[1] Wikipedia:Curved Space
[2] Wikipedia:Curved Space



$$(d\ell)^2 = (Rd\theta)^2 + (rd\phi)^2$$

$$Rd\theta = \frac{dr}{\cos\theta} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}dr = \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}}$$

[3]Carrol & Ostlie

Métrica do Espaço 3D Curvo[4]

$$(d\ell)^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}}\right)^2 + (rd\phi)^2$$

usando a curvatura $\quad K = 1/R$

$$(d\ell)^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}\right)^2 + (rd\phi)^2$$

Extendendo o mesmo raciocínio para o espaço 3D (r é a agora a distância da origem)

$$(d\ell)^2 = \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}\right)^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\phi)^2$$

[4] Carrol & Ostlie

Métrica no Espaço-tempo Curvo

Universo homogêneo e isotrópico, tempo homogêneo e isotrópico

Métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + (d\ell)^2$$

$$(ds)^2 = -c^2 dt^2 + \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}\right)^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\phi)^2$$

substituindo o fator de escala $a(t) = r(t)/r$ na equação e na curvatura $K(t) = k/a^2(t)$ temos a
Métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
coordenadas polares de circunferência reduzida

$$\boxed{(ds)^2 = -(cdt)^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2)\right]}$$

NOTA
circunferência reduzida – como não podemos medir r diretamente como distâcia radial do centro, podemos usar a circunferência reduzida: o raio é a circunferência naquele ponto dividido por 2π

Usando coordenadas hiperesféricas

$$(ds)^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[dr^2 + S_k(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \; d\phi^2)\right]$$

$$(ds)^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2\right]$$

$$S_k(r) = \begin{cases} \sqrt{k}^{-1} \sin(r\sqrt{k}) & k > 0 \\ r, & k = 0 \\ \sqrt{|k|}^{-1} \sinh(r\sqrt{|k|}), & k < 0. \end{cases}$$

Distância Própria

Qual a **distância de uma galáxia** localizada em (r, θ, ϕ)?

Um fóton emitido em t_e chega no observador em t_0.

$$(ds)^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2\right]$$

expansão uniforme e homogênea, θ e ϕ da galáxia constantes ao longo da expansão $d\theta = d\phi = 0$

$$ds = a(t) dr$$

distância própria

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r dr' = a(t) r$$

onde r é a distância comóvel.

$$R(r) = a(t) r$$

Também podemos escrever

$$\dot{d}_p = \dot{a} r = \frac{\dot{a}}{a} d_p$$

ou seja

$$v_p(t_0) = \frac{\dot{a}}{a} d_p(t_0) = H_0 \ d_p(t_0)$$

A luz da galáxia viaja até chegar no observador numa geodésica nula $ds = 0$ com θ e ϕ constantes.

Partindo da métrica de FLRW

$$\frac{c\,dt}{a(t)} = \pm\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{9}$$

Vamos acompanhar duas cristas de onda para medir quando se afastam durante a expansão ocorrida na sua viagem
Uma crista é emitida em r_e e t_e e observada em $r_0 = 0$ e t_0
A segunda é emitida em $t_e + \Delta t_e$ e observada em $t_0 + \Delta t_0$

Integrando a Eq. (9) para a primeira e segunda crista, respectivamente, temos

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{r_e}^{0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$
$$\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{r_e}^{0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Subtraindo as equações do percurso das cristas

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} - \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = 0 \tag{10}$$

mas podemos escrever

$$\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

Assim, a Eq. 10 fica

$$\int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} \tag{11}$$

se desprezamos a variação de $a(t)$ nos intervalos $[t_e, t_e + \Delta t_e]$ e $[t_0, t_0 + \Delta t_0]$ podemos integrar 11 e obter

$$\frac{\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} \tag{12}$$

Como Δt é o intervalo entre duas cristas, então

$$\lambda = c\Delta t$$

Redshift Cosmológico e a Expansão

A Eq. 12 fica então

$$\boxed{\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}}$$

Lembrado que

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = z \qquad\qquad (v \ll c)$$

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = z$$

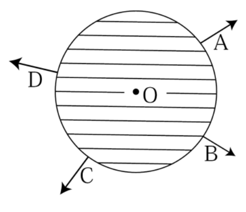
ou

$$\boxed{1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}}$$

ou ainda

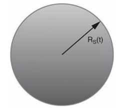
$$\boxed{1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}}$$

Cosmodinâmica



a força resultante nas partículas A, B, C, D localizadas na superfície da esfera de raio R_s é resultado da ação da gravidade da matéria interna a R_s, e é equivalente a toda a massa no ponto O.

Equação de Friedmann

Forma Newtoniana 

Energia por unidade de massa de uma partícula na superfície da esfera $R_s(t)$

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 R_s(t)}{dt^2}\right) - \frac{GM_s}{R_s(t)^2}$$

é constante para um partícula na superfície da esfera que se expande ou contrai.

A massa da esfera é constante

$$M_s = \frac{4\pi}{3}\ \rho(t) R_s(t)^3$$

O raio comóvel r_s

$$R_s(t) = a(t) r_s$$

logo

$$\frac{dR_s}{dt} = \dot{a} r_s$$

Equação de Friedmann

$$\frac{1}{2}r_s^2\dot{a}^2 - \frac{4\pi}{3}Gr_s^2\rho(t)a(t)^2 = U$$

rearranjando

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_s^2}\frac{1}{a(t)^2}}$$

Equação de Friedmann (forma Newtoniana)

Equação Friedmann

Forma Relativística a partir de

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad \text{sem constante cosmológica}$$

Correções

$$\begin{array}{ccccl} \text{Newton} & & \text{Einstein} & & \\ \rho & \rightarrow & \varepsilon / c^2 & & \text{inclui radiação e matéria} \\ \dfrac{2U}{r_s^2} & \rightarrow & \dfrac{-\kappa c^2}{R_0^2} & & U(<,>,=)0 \text{ corresponde a } \kappa = +1, -1, 0 \end{array}$$

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2}} \tag{13}$$

Equação de Friedmann (forma Relatividade Geral)

$$E = (m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2}$$

Para entender a troca de ρ por ε considere regime de baixas velocidades $v \ll c$

$$\begin{aligned}
p &= \gamma m v \\
p &\approx m v \\
E_{\text{nonrelat}} &\approx mc^2(1 + v^2/c^2)^{1/2} \\
&\approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\
\varepsilon \equiv \frac{E}{V} &\approx \rho c^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \approx \rho c^2 \qquad \rho \approx \frac{\varepsilon}{c^2}
\end{aligned}$$

No caso relativístico, ainda somamos a energia dos fótons

$$E = pc = hf$$

Densidade Crítica

Universo plano $\kappa = 0$ (crítico)

Eq. 13 Friedmann Relativística

$$H(t)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t)$$

Assim,

$$\boxed{\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G}H(t)^2} \qquad \textbf{Densidade Crítica}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c,0} = \frac{3c^2}{8\pi G}H_0^2 &= 4870 \pm 290 \text{ Mev m}^{-3} \\ \rho^{c,0} = \frac{\varepsilon_{c,0}}{c^2} &= (8.7 \pm 0.5) \times 10^{-27} \text{ kg} \ \ \text{m}^{-3} \\ &= (1.28 \pm 0.08) \times 10^{11} \text{ M}_\odot \ \ \text{Mpc}^{-3} \end{aligned}$$

Densidade de energia **normalizada** pela densidade crítica

$$\boxed{\Omega(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}} \qquad \textbf{parâmetro de densidade}$$

Equação de Friedmann (13)

$$1 = \frac{\varepsilon(t)}{\frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)^2 \ H(t)^2}$$

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{(R_0 \ a(t) \ H(t))^2} \qquad \text{Eq. Friedmann}$$

$$\boxed{1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2}} \qquad \textbf{presente}$$

Sabendo Ω_0 sabemos sinal de κ

Sabendo ainda H_0, sabemos R_0 $\qquad R_0 = \frac{c}{H_0}|1 - \Omega_0|^{-1/2} \approx 10^{28}$ m ≈ 300 Gpc

Evolução dos Parâmetros

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{(R_0\ a(t)\ H(t))^2} \qquad \text{Eq. Friedmann}$$

lado direito não muda de sinal ao longo da expansão

logo

lado esquerdo não muda de sinal ao longo da expansão

uma vez $\Omega < 1$ sempre $\Omega < 1$

uma vez $\Omega = 1$ sempre $\Omega = 1$

uma vez $\Omega > 1$ sempre $\Omega > 1$

Supondo o Universo preenchido por energia, homogênea e uniformemente, um fluido

Conservação de energia (1a Lei da Termodinâmica)

$$dQ = dE + PdV \tag{14}$$

Num Universo homogêneo e uniforme nao há fluxo de calor $dQ = 0$ (adiabático)

Como $dS = dQ/T$ uma expansão homogênea não aumenta a entropia do Universo

Equação de Fluidos

Da Eq. (14) temos

$$\dot{E} + P\dot{V} = 0$$

Volume de uma esfera de raio comóvel r_s

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} r_s^3 a(t)^3 \qquad \text{assim} \qquad \dot{V} = \frac{4\pi}{3} r_s^2 (3a^2 \dot{a}) = V(t)\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

Energia da esfera

$$E = V(t)\varepsilon(t) \qquad \text{logo} \qquad \dot{E} = V\dot{\varepsilon} + \dot{V}\varepsilon = V\left(\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon\right)$$

ou

$$\underbrace{\underbrace{\dot{E}}_{-P\dot{V}}}_{-PV(3\dot{a}/a)} = V\left(\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon + 3\frac{\dot{a}}{a}P = 0$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0} \qquad \text{Equação de Fluido Cosmológica}$$

Equação da Aceleração

Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2}$$

ou

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon a^2 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

derivando com relação ao tempo

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\dot{\varepsilon}a^2 + 2\varepsilon a\dot{a}\right)$$

ou

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\dot{\varepsilon}\frac{a}{\dot{a}} + 2\varepsilon\right)$$

Fluidos

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0 \qquad \text{logo} \qquad \varepsilon\frac{\dot{a}}{a} = -3(\varepsilon + P)$$

juntando as duas últimas

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\varepsilon + 3P\right)} \qquad \text{Equação da Aceleração} \tag{15}$$

$$\varepsilon > 0 \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{a} < 0$$

Equação de Estado

3 Equações, 2 independentes

- Equação de Friedmann
- Equação de Fluidos
- Equação de Aceleração

3 variáveis

- Parâmetro de escala $a(t)$
- Densidade de Energia $\varepsilon(t)$
- Pressão $P(t)$

Precisamos de uma relação

$$P = P(\varepsilon) \qquad \text{Equação de Estado}$$

Equação de Estado

Relação Linear

$$P = w\varepsilon$$

Gás ideal não relativístico

$$PV = NkT$$

$$PV = (M/m)kT \qquad M \text{ massa total em } V,\ m \text{ massa das partículas}$$

$$P = \frac{\rho}{m}kT$$

$$\varepsilon \approx \rho c^2 \qquad \text{não relativístico}$$

$$P \approx \frac{kT}{mc^2}\varepsilon$$

$$3kT = m\langle v^2\rangle$$

$$P \approx \frac{\langle v^2\rangle}{3c^2}\varepsilon$$

$$w \approx \frac{\langle v^2\rangle}{3c^2} \ll 1 \qquad \boxed{w \approx 0} \quad \text{matéria}$$

gás a CNTP: $w \sim 10^{-12}$ hidrogêneo não relativístico se $T \ll 10^9$ K

Equação de Estado

Fótons (e partículas relativísticas) – radiação

$$v^2 \approx c^2$$

$$w = \frac{v^2}{3c^2} \approx \frac{1}{3} \qquad \boxed{w = \frac{1}{3}} \quad \text{fótons}$$

$$P_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{3}\varepsilon_{\mathrm{rel}}$$

Na Equação da Aceleração (15)

Para que $\ddot{a} > 0$ é necessário que $P < -\frac{1}{3}\varepsilon$

$\boxed{w < -\frac{1}{3}}$ **Energia Escura**

Equação de Estado

Resumo

$$\boxed{P = w\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} \text{Matéria} \qquad & w = 0 \\ \text{Radiação} \qquad & w = \frac{1}{3} \\ \text{Energia Escura} \qquad & w < -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Constante Cosmológica Λ

Universo estático é instável (exceto se vazio):

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \qquad \text{Poisson}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = -\nabla\Phi$$

$$\mathbf{a} = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi = \text{ cte} \qquad \text{Universo estático}$$

$$\rho = \frac{1}{4\pi G}\nabla^2\Phi \quad \rightarrow \quad \rho = 0 \qquad \text{sse Universo vazio}$$

Universo estático e com $\rho \neq 0$

$$\nabla^2\Phi + \Lambda = 4\pi G\rho \qquad \text{Poisson com } \Lambda$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad \text{Eq. de Campo de Einstein com } \Lambda$$

Λ constante cosmológica

Resumo das Equações de Cosmodinâmica

Friedmann (com Λ)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{16}$$

Equação da Aceleração (com Λ)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \tag{17}$$

Fluidos (não afetada)

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0 \tag{18}$$

Eq. de Estado (não afetada)

$$P = w\varepsilon \tag{19}$$

Mais Λ

Reescrevendo Eq. de Friedmann (16)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\varepsilon + \varepsilon_\Lambda) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\varepsilon_\Lambda \equiv \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda} = \text{ cte}$$

$\varepsilon_\Lambda =$ cte densidade de energia de Λ

Equação de Fluidos para ε_Λ

$$\dot{\varepsilon}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_\Lambda + P_\Lambda) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda = \frac{-c^2}{8\pi G}\Lambda}$$

Pressão P_Λ associada a Λ

Sugestão para ε_Λ: energia do vácuo

Leitura Complementar 1

Philosophy of Cosmology

Christopher Smeenk and George Ellis

The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.),

https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/cosmology/

https://plato.stanford.edu/entries/cosmology/

Material Complementar

Video-aulas

Sabine Hossenfelder

Dark Matter. Or What?

`https://youtu.be/FN2d2cmi_Gk`

Modified Gravity, demystified

`https://youtu.be/2VNcDoLNJk8`

Superfluid Dark Matter

`https://youtu.be/468cyBZ_cq4`

Modelos de Universo

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3} \qquad \text{Friedmann}$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0 \qquad \text{Fluidos}$$

$$P = w\varepsilon \qquad \text{Estado}$$

Universo:

Radiação (γ): $w = 1/3$
Matéria não relativística (m): $w = 0$
Energia Escura (Λ): $w = -1$

Evolução da Densidade de Energia

Densidade de energia total

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$$

$$P = \sum_i w_i \varepsilon_i$$

$$i \in \{\gamma, m, \Lambda, ...\}$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w_i)\varepsilon_i = 0$$

$$\frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i} = -3(1 + w_i)\frac{da}{a}$$

$$\boxed{\varepsilon_i(a) = \varepsilon_{i,0}\ a^{-3(1+w_i)}}$$

$$\boxed{\rho_i(a) = \rho_{i,0}\ a^{-3(1+w_i)}}$$

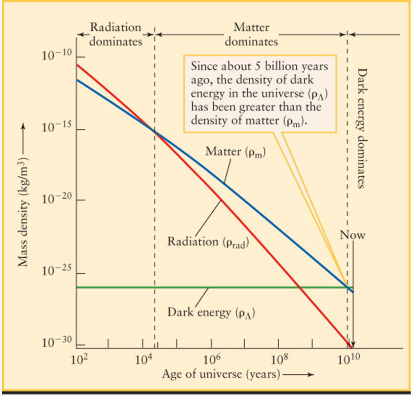
Evolução da Densidade de Energia

$$\begin{aligned}
\text{Radiação} \qquad & \varepsilon_\gamma(a) = \varepsilon_{\gamma,0}\ a^{-4} \\
\text{Matéria} \qquad & \varepsilon_m(a) = \varepsilon_{m,0}\ a^{-3} \\
\text{Energia Escura} \qquad & \varepsilon_\Lambda(a) = \varepsilon_{\Lambda,0}
\end{aligned}$$

Mas fótons não são conservados, entretanto, densidade do CMB domina

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{CMB},0} = \sigma T^4 &= 4.2 \times 10^{-14}\ \mathrm{Jm}^{-3} \\
\varepsilon_{\mathrm{estrelas},0} &= 1.0 \times 10^{-15}\ \mathrm{Jm}^{-3}
\end{aligned}$$

Evolução da Densidade de Energia



$\lim_{a \to 0}$ dominado pelo maior w (radiação)

$\lim_{a \to \infty}$ dominado pelo menor w (energia escura)

Evolução de dominação: **radiação** $\to$ **matéria** $\to$ **energia escura**

Universo Multicomponente

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2}$$

Equação de Friedmann + Eq. de Estado com Multicomponentes :

γ radiação e partículas relativísticas
m matéria (escura e bósons)
Λ energia escura

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i \in \{\gamma, m, \Lambda, \kappa\}} \rho_{i,0}\ a^{-3(1+w_i)}$$

$$\rho = \frac{\rho_{\gamma,0}}{a^4} + \frac{\rho_{m,0}}{a^3} + \frac{\rho_{\kappa,0}}{a^2} + \rho_\Lambda \tag{20}$$

Neste caso incluimos a curvatura na soma como $\rho_k = \frac{3\kappa c^2}{8\pi G R_0^2 a^2}$

Equação de Friedmann Normalizada

Densidade Critica atual

$$\rho_c, 0 \equiv \frac{3H_0}{8\pi G}$$

$$\Omega_{i,0} = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{c,0}} = \frac{3H_0}{8\pi G}\rho_{i,0}$$

normalizando Eq (20) por ρ_c

$$\Omega_0 = \Omega_{\gamma,0}\ a^{-4} + \Omega_{m,0}\ a^{-3} + \Omega_{\kappa,0}\ a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}$$

Normalizando Eq. de Friedmann

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3}}_{\frac{H_0^2}{\rho_{c,0}}} \sum_{i\in\{\gamma,m,\Lambda,\kappa\}} \rho_{i,0}\ a^{-3(1+w_i)}$$

Logo,

$$\boxed{\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,R}\ a^{-4} + \Omega_{0,M}\ a^{-3} + \Omega_{0,k}\ a^{-2} + \Omega_{0,\Lambda}}$$

Ainda, como

$$a = \frac{1}{1+z}$$

temos

$$\boxed{H^2(z) = H_0^2\left[\Omega_\gamma(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda\right]}$$

Universo Vazio

Universo Vazio $\varepsilon = 0$

Eq. de Friedmann

$$\dot{a}^2 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2} \qquad \dot{a} = \sqrt{-\frac{\kappa c^2}{R_0^2}}$$

Soluções possíveis

1.
Universo vazio,
estático,
plano,
métrica de Minkowski,
relatividade especial

$$\boxed{\kappa = 0 \rightarrow \dot{a} = 0}$$

Universo Vazio

2.
Universo vazio,
curvatura negativa,
expandindo ou contraindo linearmente
Universo de Milne

$$\boxed{\kappa = -1 \qquad \rightarrow \qquad \dot{a} = \pm \frac{c}{R_0} \qquad a(t) = \frac{t}{t_0}, \qquad t_0 = R_0/c}$$

$k > 0$ não possível $\rightarrow \dot{a} \in \mathbb{C}$

Universo Vazio $\rightarrow$ boa aproximação para Universo de baixa densidade $\qquad \Omega \ll 1$

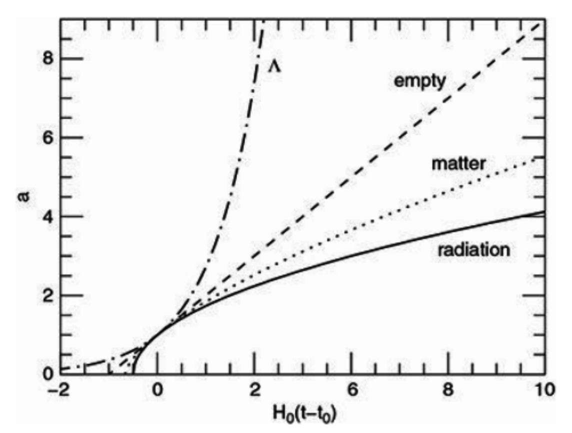
Exemplo:

Fóton emitido em t_e e observado em t_0

$$1 + z = \frac{1}{a(t_e)} = \frac{t_0}{t_e}$$

$$t_e = \frac{t_0}{1+z} = \frac{H_0^{-1}}{1+z}$$ quando foi emitido

Evolução do Fator de Escala $a(t)$ – Universo monocomponente



adaptado de B. Ryden, Introduction to Cosmology

Bibliography

books

- Ronaldo E. Souza, Introdução a Cosmologia, EDUSP, 2004
- Barbara Ryden, Introduction to Cosmology, Cambridge University Press, 2017
- Bradley Carroll, Dale A. Ostile, An Introduction to Modern Astrophysics, Cambridge University Press, 2017
- Stephen Serjeant, Observational Cosmology, Cambridge University Press, 2010.

websites

- Mark Whittle, GRADUATE EXTRAGALACTIC ASTRONOMY Web Notes, http://people.virginia.edu/˜dmw8f/astr5630
- Hyperphysics website, `http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu`
- Wikipedia articles on Cosmology, `wikipedia.org`
  Prof. Max Pettini Lecture Notes – `https://www.ast.cam.ac.uk/ pettini/Intro Cosmology/`