IMEF – FURG

Lista de Exercícios – Mét. Mat. da Física I

Equações Diferencias Parciais

Fabricio Ferrari – 2014

Adaptado de Stanley Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Dover 1993

1. Mostre que

$$u(x,t) = e^{-\lambda^2\alpha^2 t}\ [A\ \sin(\lambda x) + B\ \cos(\lambda x)]$$

satisfaz a equação $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ para A, B, λ constantes arbitrárias.

2. Mostre que

$$2\int_0^1 \sin(m\pi x)\ \sin(n\pi x)\ dx = \delta_{mn},$$

para m, n inteiros.

3. Encontre a expansão de Fourier

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$$

onde

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\ \sin(n\pi x)\ dx$$

da função $\phi(x) = 1$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$. Desenhe os 3 primeiros termos e sua soma. Se souber fazer o gráfico da soma em computador, desenhe a expansão com 10 e com 30 termos. Se não souber, aproveite a oportunidade e aprenda.

4. A partir da solução do problema **3**, qual a solução do problema de valor inicial e de valor de contorno

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & \\ \left\{\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{array}\right. & 0 < t < \infty \\ u(x,0) = 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}$$

5. Repita o problema **4** para

$$u(x,0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{3}\sin(4\pi x) + \frac{1}{5}\sin 6\pi x$$

6. Qual a solução do problema **4** se

$$u(x,0) = x - x^2$$

7. Verifique que a solução de D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\ d\xi$$

satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{array}{l} u_{tt} = c^2\ u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \quad 0 < t < \infty \\ \left\{ \begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{array} \right. \end{array}$$

8. Qual a solução do problema de valor inicial

$$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} \\ \left\{ \begin{array}{l} u(x,0) = e^{-x^2} \\ u_t(x,0) = 0 \end{array} \right. \\ -\infty < x < \infty \quad 0 < t < \infty \end{array}$$

9. Qual a solução do problema de valor inicial

$$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} \\ \left\{ \begin{array}{l} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = xe^{-x^2} \end{array} \right. \\ -\infty < x < \infty \quad 0 < t < \infty \end{array}$$

10. Encontre a solução para o problema da corda vibrante

$$\begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ \text{c.c.} \left\{ \begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{array} \right. \\ \text{c.i.} \left\{ \begin{array}{l} u(x,0) = \sin(\pi x/L) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x/L) \\ u_t(x,0) = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Faça o gráfico da solução para vários instantes de tempo. A solução é periódica? Se sim, qual o período?

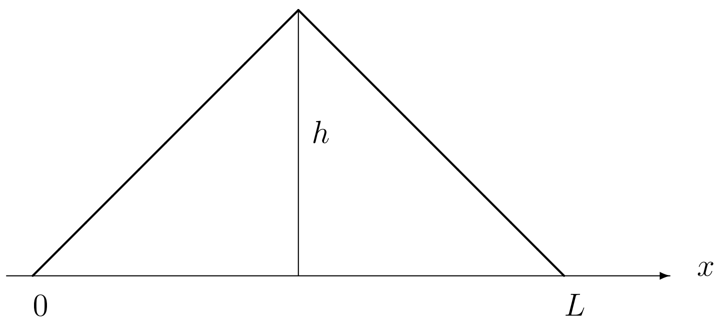
11. Repita o problema **10** para o caso

$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = \sin(3\pi x/L).$$

Faça o gráfico da solução para vários instantes de tempo.

12. A corda de um violão de comprimento $L = 1$ e puxada para cima no seu meio até uma altura h e então liberada. Suponha que a posição inicial da corda seja dada por

$$u(x,0) = \begin{cases} 2hx & 0 \leqslant x \leqslant {}^1/_2 \\ 2h(1-x) & {}^1/_2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$



Resolve o movimento subsequente quando a corda é liberada.