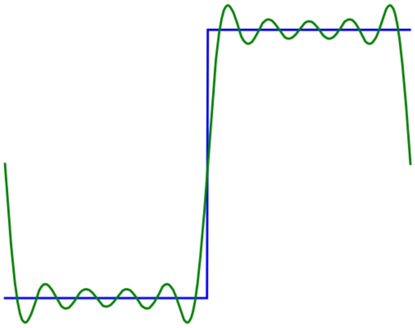
Processamento Digital de Sinais



Parte 4 – Análise de Fourier

Fabricio Ferrari

Unipampa/Bagé

Diferentes Ferramentas e Respectivos Domínios

Ferramenta	t	ω
Série de Fourier	contínuo	discreto
Transformada Integral de Fourier	contínuo	contínuo
Transformada Discreta de Fourier	discreto	discreto

t é a coordenada temporal
$\omega = 2\pi/T$ é a frequência angular.

O mesmo se aplica para as coordenadas
x (distância) e
$\kappa = 2\pi/\lambda$ (número de onda)

Funções Ortogonais

Produto Interno de duas funções f e g

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

se $\langle f, g \rangle = 0$ então f e g são ortogonais no intervalo $[a, b]$

$\longrightarrow$ são linearmente independentes. Conjunto

Ortogonal

$$\langle g_m, g_n \rangle = \int_a^b g_m(x)\, g_n(x)\, dx = A\, \delta_{mn}$$

É ortonormal se $A = 1$. (δ_{mn} delta de Kronecker)

Conjunto Ortogonal: Exemplo 1 – senos

$$g_m(x) = \sin(mx) \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad \text{para} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$\langle g_m, g_n \rangle = \int_a^b \sin(mx)\ \sin(nx)\ dx = \pi \delta_{mn} \qquad m, n = 1, 2, \ldots$$

Conjunto Ortonormal

$$g'_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx) \qquad m = 1, 2, \ldots$$

$$\{g'_m(x)\} = \left\{ \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(3x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

Conjunto Ortogonal: Exemplo 2 – cossenos

$$f_m(x) = \cos(mx) \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad \text{para} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_a^b \cos(mx)\ \cos(nx)\ dx = \pi \delta_{mn} \qquad m, n = 1, 2, \ldots$$

Conjunto Ortonormal

$$f'_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) \qquad m = 1, 2, \ldots$$

$$\{ f'_m(x) \} = \left\{ \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

Conjunto Ortogonal: Exemplo 3 – senos e cossenos

$$g_m(x) = \sin(mx) \qquad f_m(x) = \cos(mx)$$

$$\begin{aligned} \langle f_m, f_n \rangle &= \delta_{mn} \\ \langle f_m, g_n \rangle &= 0 \\ \langle g_m, g_n \rangle &= \delta_{mn} \end{aligned}$$

Conjunto ortogonal

$$\left\{ 1, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\} = \left\{ e^{inx} \right\}$$

$n = 1, 2, \ldots \qquad i^2 = -1$

Série de Fourier

Série de Fourier

Expansão de $f(x)$ em termos de funções ortogonais

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right]$$

$f(x)$ função qualquer contínua em $[pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx
\end{aligned}$$

os coeficientes $\{a_n, b_n\}$ representam a função em termos da base $\{\cos(nx), \sin(nx)\}$

Exemplo

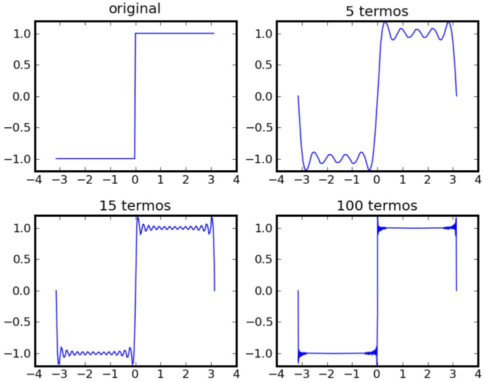
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ +1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx = \frac{2}{n\pi}\left(1 - cos(n\pi)\right) \end{aligned}$$

Exemplo (cont.)

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \ldots\right]$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n-1)x\right]}{2n-1}$$



Funções pares e ímpares

Função Par

simétrica com relação ao eixo y $\qquad g(-x) = g(x)$

$$\int_{-a}^{a} g(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\, dx$$

Função Ímpar

simétrica com relação à origem $\qquad h(-x) = -h(x)$

$$\int_{-a}^{a} h(x)\, dx = 0$$

$\cos(nx)$ é par

$\sin(nx)$ é impar

Séries de Senos e Cossenos

Teorema 1:
A série de Fourier de uma função par é uma série de cossenos

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Teorema 1:

A série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Teorema 1:

Os coeficiente de Fourier de umas soma $f_1 + f_2$ são as somas dos coeficientes de f_1 e f_2.

Exemplo

$$f(x) = x + \pi$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \pi$$

Exemplo

$$f(x) = x + \pi$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \pi$$

$$f_2(x) = \pi \qquad a_0 = \pi \qquad a_n, b_n = 0$$

Exemplo

$$f(x) = x + \pi$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \pi$$

$$f_2(x) = \pi \qquad a_0 = \pi \qquad a_n, b_n = 0$$

$$f_1(x) = x \qquad f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad \text{impar}$$

$$a_0 = 0 \qquad a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Exemplo

$$f(x) = x + \pi$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \pi$$

$$f_2(x) = \pi \qquad a_0 = \pi \qquad a_n, b_n = 0$$

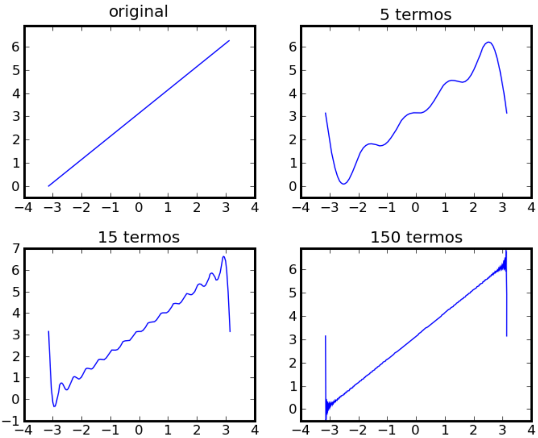
$$f_1(x) = x \qquad f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad \text{impar}$$

$$a_0 = 0 \qquad a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\,(-1)^{n+1}\,\frac{\sin(nx)}{n} \\ f_2(x) &= \pi \\ f(x) &= \pi + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,(-1)^{n+1}\,\frac{\sin(nx)}{n} \end{aligned}$$

Exemplo (cont.)

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \pi + 2\left[\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots\right]$$



Funções de Período Arbitrário

$$f(x) \qquad f(t)$$

$$x \in [-\pi, \pi] \qquad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

Funções de Período Arbitrário

$$
\begin{array}{ccc}
f(x) & & f(t) \\
x \in [-\pi, \pi] & & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\
\frac{x}{2\pi} & = & \frac{t}{T}
\end{array}
$$

Funções de Período Arbitrário

$$\begin{array}{ccc} f(x) & & f(t) \\ x \in [-\pi, \pi] & & t \in \left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right] \\ \dfrac{x}{2\pi} & = & \dfrac{t}{T} \\ x = 2\pi\dfrac{t}{T} & & t = \dfrac{T}{2\pi}x \\ dx & = & \dfrac{2\pi}{T}dt \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -\pi & \longrightarrow & t = -\frac{T}{2} \\ x = +\pi & \longrightarrow & t = \frac{T}{2} \end{cases}$$

Funções de Período Arbitrário

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\,\frac{2\pi}{T}dt \\
a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\,\cos\left(n\frac{2\pi t}{T}\right)\,\frac{2\pi}{T}dt \\
b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\,\sin\left(n\frac{2\pi t}{T}\right)\,\frac{2\pi}{T}dt
\end{aligned}
$$

Funções de Período Arbitrário

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\,\frac{2\pi}{T}dt \\
a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\,\cos\left(n\frac{2\pi t}{T}\right)\,\frac{2\pi}{T}dt \\
b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\,\sin\left(n\frac{2\pi t}{T}\right)\,\frac{2\pi}{T}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(n\omega t)\,dt \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin(n\omega t)\,dt
\end{aligned}
$$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$$

Transformada Contínua de Fourier – FT

$$f(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \{\ A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t)\ \}\ d\omega$$

Transformada Contínua de Fourier – FT

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{\, A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t)\,\}\; d\omega \\
A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \\
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt
\end{aligned}
$$

Transformada Contínua de Fourier – FT

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{\, A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t)\,\}\; d\omega \\
A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \\
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt
\end{aligned}
$$

Notação com números complexos

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \\
e^{i\omega t} &= \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Tranformada Contínua de Fourier – FT

Usando a relação de ortogonalidade para $e^{i\omega t}$ podemos escrever

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) \quad = \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Tranformada Contínua de Fourier – FT

Usando a relação de ortogonalidade para $e^{i\omega t}$ podemos escrever

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Tranformada Contínua de Fourier – FT

Usando a relação de ortogonalidade para $e^{i\omega t}$ podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) &= \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt
\end{aligned}
$$

$F(\omega)$ é a Transformada de Fourier de $f(t)$

Exemplo FT

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < b \\ 0 & |t| > b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) = \int_{-b}^{b} e^{-i\omega t} dt &= \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-b}^{b} = \left[\frac{i}{\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-b}^{b} = \\ &= \frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}\right) = \frac{2\sin(b\omega)}{\omega} \end{aligned}$$

$$F(\omega) = \frac{2\sin(b\omega)}{\omega}$$

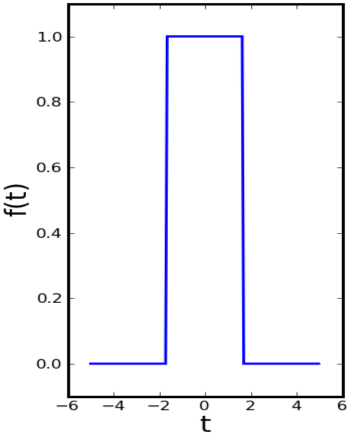
FT - Pulso Quadrado

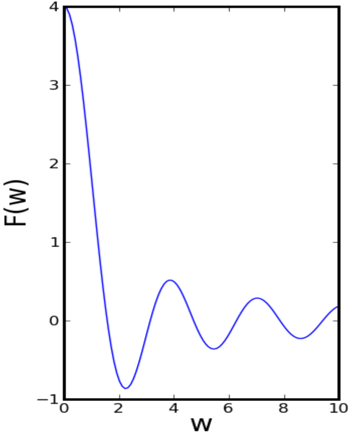
Domínio do Tempo

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < b \\ 0 & |t| > b \end{cases}$$

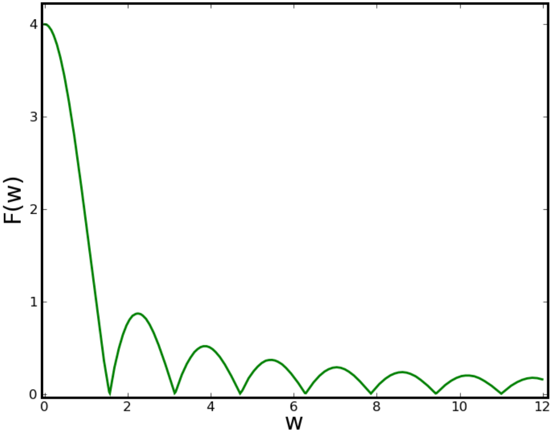
Domínio de Frequência

$$F(\omega) = \frac{2\sin(b\omega)}{\omega}$$





Espectro de Frequências - Pulso Quadrado



Relação de Incerteza

$$\Delta t \Delta \omega > 2\pi$$

Transformada Discreta de Fourier

DFT – Transformada de Fourier para Sinais Discretos

Transformada de Fourier de uma função contínua $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

DFT – Transformada de Fourier para Sinais Discretos

Transformada de Fourier de uma função contínua $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Sinal discreto – tempo discreto, frequências discretas:
$f(t)$ amostrada com N pontos nos instantes

$$t_n = n\,T, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

DFT – Transformada de Fourier para Sinais Discretos

Transformada de Fourier de uma função contínua $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Sinal discreto – tempo discreto, frequências discretas:
$f(t)$ amostrada com N pontos nos instantes

$$t_n = n\,T, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$f(t) \longrightarrow f(t_n) \equiv f[n] \qquad \int \longrightarrow \sum$$

DFT – Transformada de Fourier para Sinais Discretos

Transformada de Fourier de uma função contínua $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Sinal discreto – tempo discreto, frequências discretas:
$f(t)$ amostrada com N pontos nos instantes

$$t_n = nT, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$f(t) \longrightarrow f(t_n) \equiv f[n] \qquad \int \longrightarrow \sum$$

$$T \to N, \qquad \omega t = \frac{2\pi}{T} t \longrightarrow \omega_k = \frac{2\pi}{N} k$$

$$\boxed{F[\omega_k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[t_n] e^{-i\omega_k t_n}} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

Transformada Discreta de Fourier

Direta

$$\boxed{F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \ \exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right)} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

Inversa

$$\boxed{f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \ \exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right)} \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

$f[n]$ com N pontos no tempo $\longleftrightarrow$ $F[k]$ com N frequências

Interpretação da DFT

Funções base – biblioteca de funções – N funções:

$$\exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right)$$

Interpretação da DFT

Funções base – biblioteca de funções – N funções:

$$\exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

Interpretação da DFT

Funções base – biblioteca de funções – N funções:

$$\exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

frequências $0 \leq \omega < 2\pi n$

Interpretação da DFT

Funções base – biblioteca de funções – N funções:

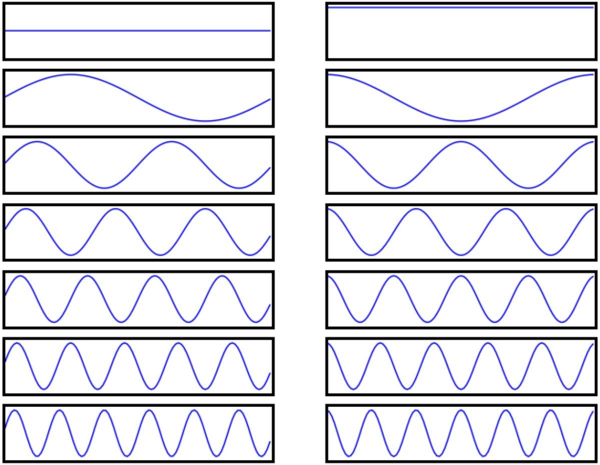
$$\exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

frequências $0 \leq \omega < 2\pi n$

$F[k]$ mede a correlação de $f[n]$ com cada uma das funções da base.

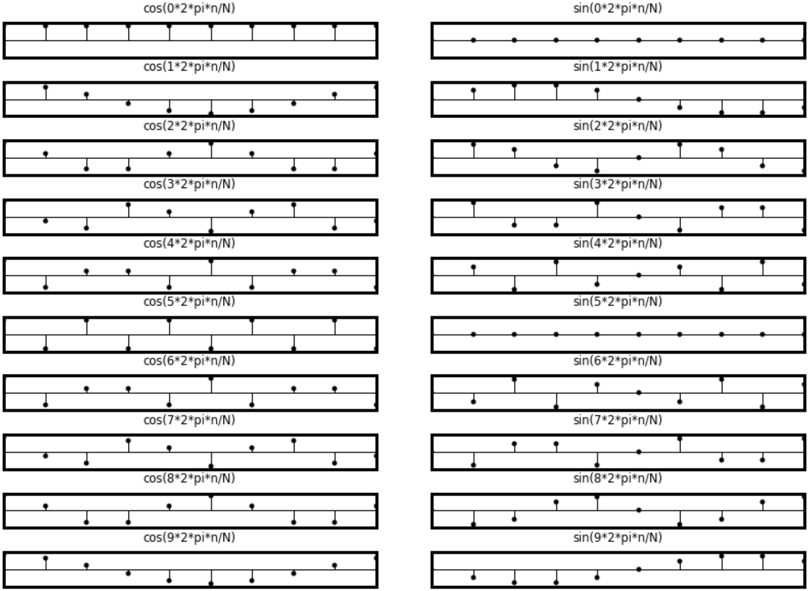
$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \; \exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right) \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

Funções da Base



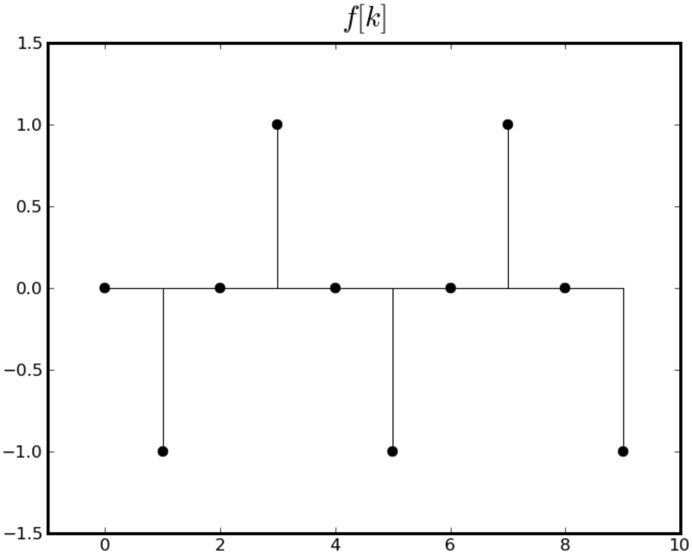
Base Completa N=10

cossenos **senos**



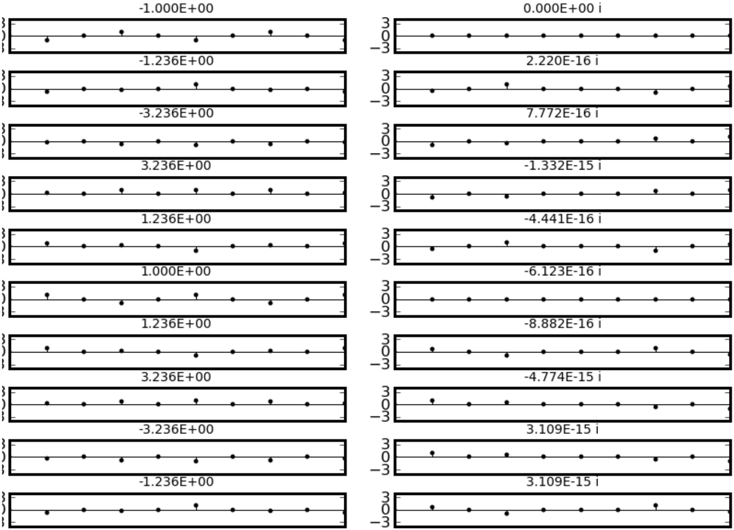
Exemplo

$f = [0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1]$



Calculando a DFT

Correlação de $f[k]$ com cada uma das funções da base

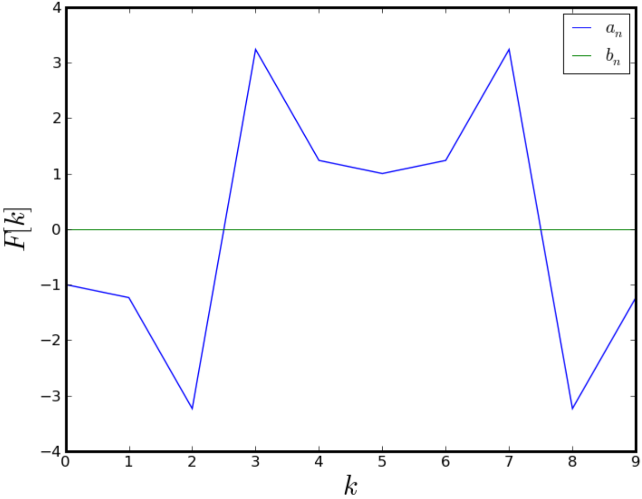


Componentes de $|F[k]|$

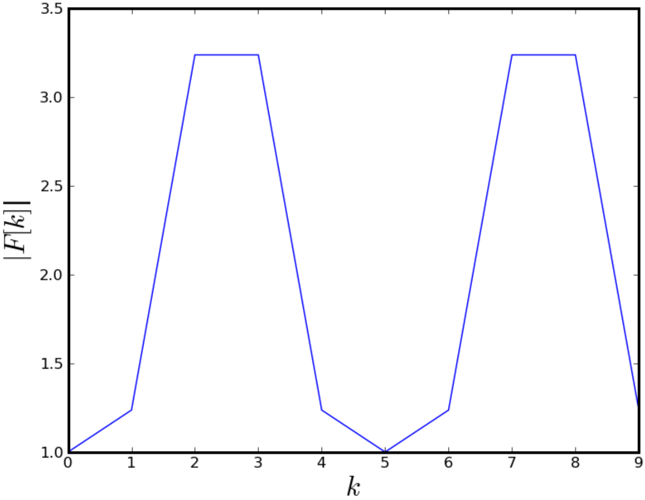
$$F[k] = a_n + i\, b_n$$

n	w	a_n	b_n
0	0.0	-1.0	0.0
1	6.28318530718	-1.2360679775	2.22044604925e-16
2	12.5663706144	-3.2360679775	7.77156117238e-16
3	18.8495559215	3.2360679775	-1.33226762955e-15
4	25.1327412287	1.2360679775	-4.4408920985e-16
5	31.4159265359	1.0	-6.12323399574e-16
6	37.6991118431	1.2360679775	-8.881784197e-16
7	43.9822971503	3.2360679775	-4.77395900589e-15
8	50.2654824574	-3.2360679775	3.10862446895e-15
9	56.5486677646	-1.2360679775	3.10862446895e-15

Componentes de $F[k]$



Espectro de $f[n]$: $|F[k]|$



Frequencias Analisadas

N frequências nas base (núm de freq. a analisar)
T_a tempo de amostragem
$f_a = \frac{1}{T_a}$ frequência de amostragem

Resolução em frequência

$$\Delta f = \frac{f_a}{N}$$

Frequências analisadas

$$f_i = i\,\Delta f = i\,\frac{f_a}{N} \qquad i = 0, \ldots, N-1$$

Exemplo Análise 1

Soma de duas frequências

$$y = sin(2\pi 5t) + sin(2\pi 17t + \pi/3)$$

$$\begin{array}{ll} f_1 = 5 \text{ Hz}, & f_2 = 17 \text{ Hz} \\ T_1 = 0.2 \text{ Hz}, & T_2 = 0.0588 \text{ Hz} \\ \omega_1 = 31.42 \text{ rad/s}, & \omega_2 = 106.81 \text{ rad/s} \end{array}$$

Exemplo Análise 1

Soma de duas frequências

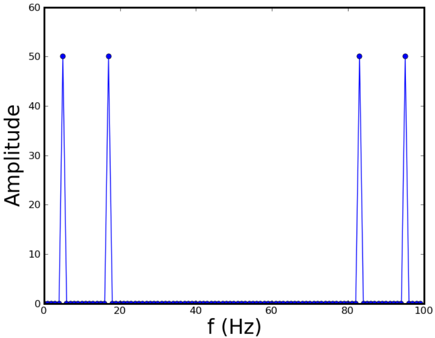
$$y = sin(2\pi 5t) + sin(2\pi 17t + \pi/3)$$

$f_1 = 5$ Hz, $f_2 = 17$ Hz
$T_1 = 0.2$ Hz, $T_2 = 0.0588$ Hz
$\omega_1 = 31.42$ rad/s, $\omega_2 = 106.81$ rad/s

```
#ipython -pylab
t0 = 0.                    # tempo inicial
tN = 10.                   # tempo final
dt = 0.01                  # intervalo (Ta),
fa = 1/dt                  # freq. amostragem fa=100 Hz
t = arange(t0,tN,dt)       # vetor com os tempos
y = sin(2*pi*5*t) + sin(2*pi*17*t+pi/3.) # soma de freqs

N = 100.                   # pontos na transformada
f = arange(N)*fa/N         # vetor das frequencias analisadas
plot(f, abs(fft(y,n=N)))   # módulo fft() do numpy, N frequencias
```

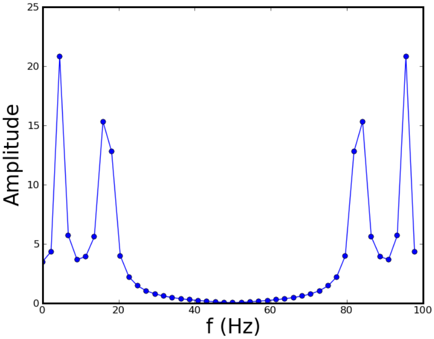
Exemplo: Análise 1

$$N = 100$$
$$dt = 0.01 \ \mathrm{s}$$
$$f_a = 100 \ \mathrm{Hz}$$
$$\Delta f = 1.0 \ \mathrm{Hz}$$
$$f_i = 0, 1, 2, ..., 99$$



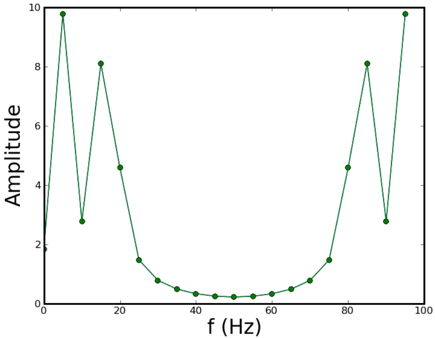
Exemplo: Análise 2

$$
\begin{aligned}
N &= 44 \\
dt &= 0.01 \ \mathrm{s} \\
f_a &= 100 \ \mathrm{Hz} \\
\Delta f &= 2.27 \ \mathrm{Hz} \\
f_i &= 0, 2.2\overline{7}, 4.5\overline{4}, 6.8\overline{1}, \ldots \\
& \quad \ldots, 15.9\overline{0}, 18.1\overline{8}, \ldots \\
& \quad 95.4\overline{5}, 97.7\overline{2}
\end{aligned}
$$



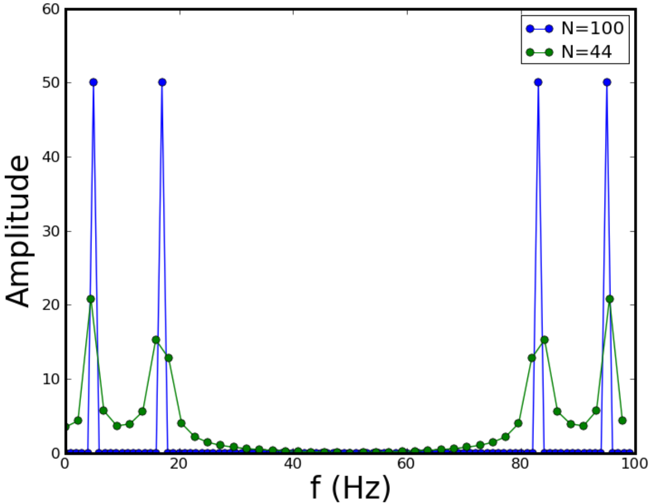
Exemplo: Análise 3

$$
\begin{aligned}
N &= 20 \\
dt &= 0.01 \ \mathrm{s} \\
f_a &= 100 \ \mathrm{Hz} \\
\Delta f &= 5 \ \mathrm{Hz} \\
f_i &= 0, 5, 10, 15, 20, \ldots
\end{aligned}
$$



Vazamento de Frequencias

Se as frequências da base não coincidem com a frequência do sinal, a amplitude do sinal se distribui em várias frequências.

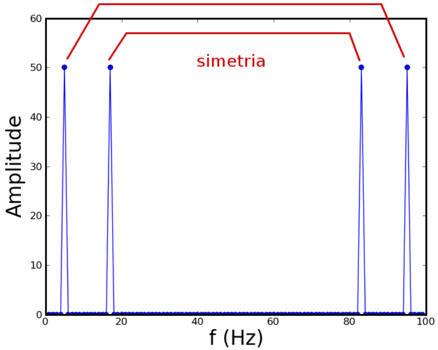


Frequencia de Nyquist, Aliasing e Simetria na DFT

Se a frequência de amostragem é f_a então a amostragem preseva somente frequências até a frequência de Nyquist $f_N = f_a/2$.

Para frequências maiores, ocorre *aliasing* e as frequências são amostradas como frequências abaixo de f_N.

Portanto, na região $f_N \leq f \leq f_a$ as frequências se repetem e o espectro é simétrico com o da região $0 \leq f \leq f_N$



Implementação simples da DFT

pseudo código

x sinal
X DFT de x

$\omega_0 \leftarrow \frac{2\pi}{N}$
para $k = 0 \ldots (N-1)$ **faça:**
    $X[k] \leftarrow 0$
    para $n = 0 \ldots (N-1)$ **faça:**
        $X[k] \leftarrow X[k] + x[n] * e^{i\omega_0 kn}$
    fim
fim

Implementação simples da DFT

Python + Numpy

```
import numpy

def dft(y,N=None):
    """DFT direta
    y variavel dependente
    N tamanho da DFT
    """

    if N==None:
        # se nao especificado eh o tamanho de y
        N = len(y)

    n = numpy.arange(len(y))
    F = numpy.zeros(N, dtype=complex)

    for k in range(N):
    F[k] = (1/numpy.sqrt(N))* \
           sum(y * numpy.exp(-1j*2*numpy.pi*k*n/N))

    return F
```

Implementação simples da DFT

```
def idft(F):
    """DFT inversa
    F coeficientes DFT
    """

    # tamanho da base
    N = len(F)

    k = numpy.arange(len(F))
    f = numpy.zeros(N)

    for n in range(N):
        f[n] = (1/numpy.sqrt(N))*\
               sum(F * numpy.exp(1j*2*numpy.pi*k*n/N))

    return f
```

Implementação simples da DFT

```python
def freqs(x,N=None):
    """Calcula frequencias de uma DFT

    x variavel independente
    N tamanho da DFT
    """
    if N==None:
        N = len(x)

    # se x especificado usa para determinar freqs
    # taxa de amostragem
    dx    = numpy.diff(x).mean()
    # freq amostragem
    fa    = 1/dx
    # resolucao em frequencia
    df    = fa/N
    # frequencias da DFT
    freqs =  numpy.arange(N) * df

    return freqs
```

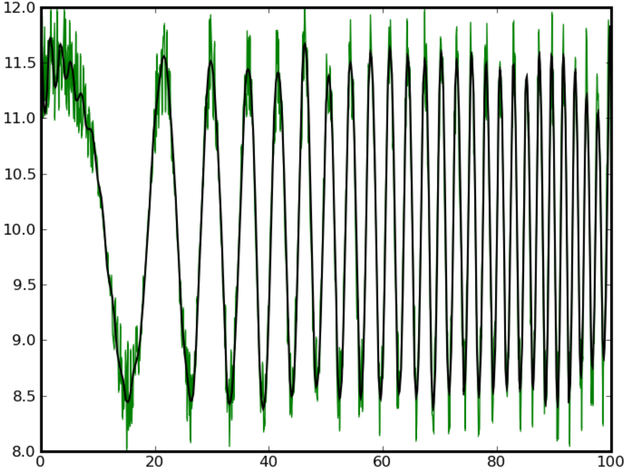
Exemplo de Uso - remoção de ruído

sinal chirp original e com ruído removido no domínio de frequência.

```
# ipython -pylab

# le os dados
x,y = loadtxt('chirpnoise.dat').T

# importa modulo de DFT
import dftff

# DFT do sinal
F = dftff.dft(y)

# zera frequencias do ruido
F[55:945] = 0

ydnz = dftff.idft(F)

figure()
plot( x,y, lw=0.5)
plot( x,ydnz, lw=2)
```

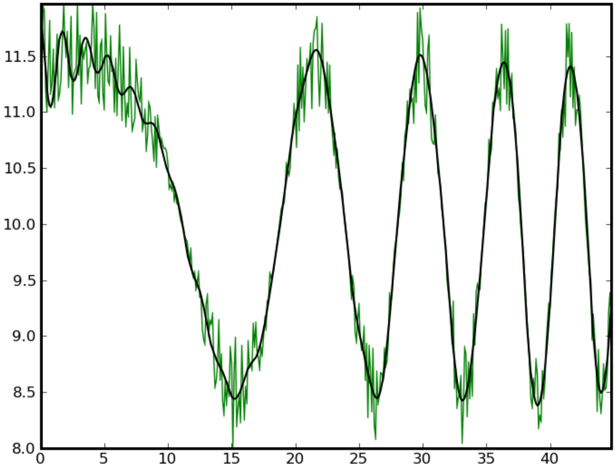
Exemplo de Uso (cont.)

sinal chirp original e com ruído removido no domínio de frequência.



Exemplo de Uso (cont.)

sinal chirp original e com ruído removido no domínio de frequência (detalhe)



Propriedades da Transformada de Fourier

Completude

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$$

Propriedades da Transformada de Fourier

Completude

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$$

Ortogonalidade

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \right) \left(e^{-\frac{2\pi i}{N} k' n} \right) = N \, \delta_{kk'}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

Completude

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$$

Ortogonalidade

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{N} kn}\right) \left(e^{-\frac{2\pi i}{N} k' n}\right) = N \, \delta_{kk'}$$

Teorema de Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2.$$

Propriedades da Transformada de Fourier (cont.)

Teorema da Convolução

$$\mathcal{F}\{\mathbf{x} * \mathbf{y}\} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\} \cdot \mathcal{F}\{\mathbf{y}\}$$

$$\mathcal{F}\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\} * \mathcal{F}\{\mathbf{y}\}$$

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{\mathbf{x}\} \cdot \mathcal{F}\{\mathbf{y}\}\right\}$$

Propriedades da Transformada de Fourier (cont.)

Teorema da Convolução

$$\mathcal{F}\{\mathbf{x} * \mathbf{y}\} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\} \cdot \mathcal{F}\{\mathbf{y}\}$$

$$\mathcal{F}\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\} = \mathcal{F}\{\mathbf{x}\} * \mathcal{F}\{\mathbf{y}\}$$

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{\mathbf{x}\} \cdot \mathcal{F}\{\mathbf{y}\}\right\}$$

A convolução no domínio temporal é a multiplicação no domínio de frequênicias

A multiplicacão no domínio temporal é a convolução no domínio de frequências

Propriedades da Transformada de Fourier (cont.)

Linearidade

se

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

então

$$X[k] = X_1[n] + X_2[n]$$

Pares de Transformadas Importantes

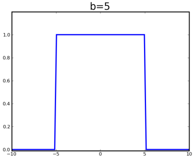
Função Pulso Unitário

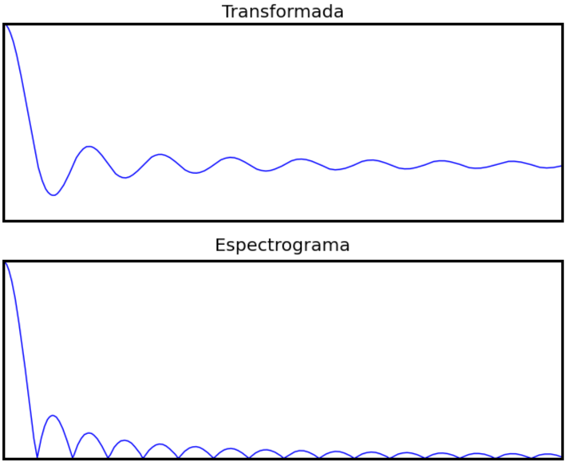
$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq b \\ 0 & |t| > b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_{-b}^{b} e^{-i\omega t}\, dt = \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \right]_{-b}^{b} \\ &= \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i\omega} = \frac{2\sin(\omega b)}{\omega} \end{aligned}$$

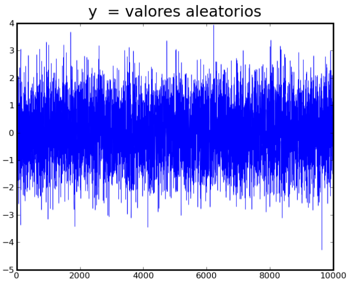
$$F(\omega) = \frac{2\sin(\omega b)}{\omega}$$

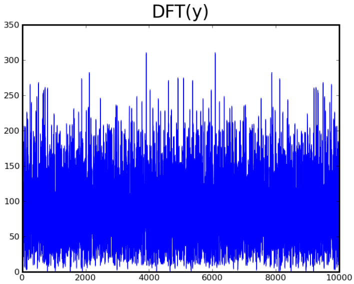
Pulso Unitário





Exemplo
vetor de valores aleatórios

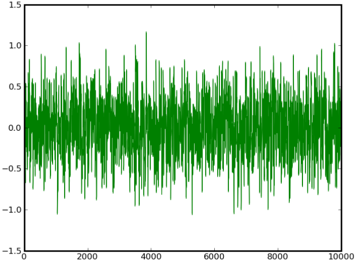




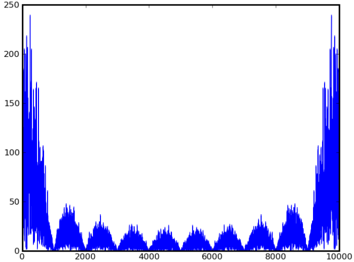
Exemplo

vetor de valores aleatórios media de 10 pontos

$y * h_{10}$

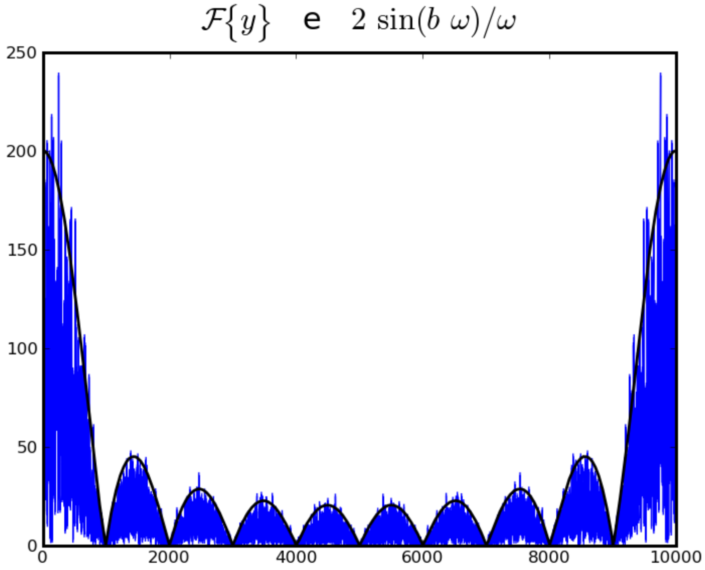


$\mathcal{F}\{y * h_{10}\} = \mathcal{F}\{y\}\mathcal{F}\{h_{10}\}$



Exemplo

Tranformada do vetor de valores aleatórios e do vetor de 10 pontos



Filtros Digitais

Quadrados

```
def hq(n):
    return 1/float(n)*array(n*[1])
```

Triangular

```
def ht(n):
    # n de cada lado
    n = n/2
    # calcula coeficientes
    h =  (n-abs(arange(-n,n+1)))
    # normaliza
    h = h/float(h.sum())
    return h
```

Filtros Digitais

```
In [68]: hq(10)
Out[68]: array([ 0.1,  0.1,  0.1,  0.1,  0.1,  0.1,  0.1,
0.1,  0.1,  0.1])

In [69]: len(hq(10))
Out[69]: 10

In [70]: hq(10).sum()
Out[70]: 0.99999999999999989
```

FIM

por enquanto