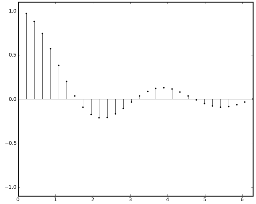
Processamento Digital de Sinais



Parte 2 – Introdução

Fabricio Ferrari

Unipampa/Bagé

2009

Aplicações

- Astrofísica
  - Melhora imagens espaciais
  - Redução de ruídos
  - Compressão de dados
  - Análise de dados (espaciais, temporais, espectrais)

Aplicações

- Astrofísica
  - Melhora imagens espaciais
  - Redução de ruídos
  - Compressão de dados
  - Análise de dados (espaciais, temporais, espectrais)
- Medicina
  - Imageamento médico (RMN, Tomografia, PET, ...)
  - Imageamento Doppler
  - Análise de eletrocardiogramas, eletroencefalograma.

Aplicações

- Astrofísica
  - Melhora imagens espaciais
  - Redução de ruídos
  - Compressão de dados
  - Análise de dados (espaciais, temporais, espectrais)
- Medicina
  - Imageamento médico (RMN, Tomografia, PET, ...)
  - Imageamento Doppler
  - Análise de eletrocardiogramas, eletroencefalograma.
- Telecomunicações
  - Compressão de dados e voz
  - Supressão/adição de eco
  - Multiplexação
  - Filtragem de ruído

Aplicações (cont.)

- Militar
  - Radar
  - Sonar
  - Criptografia

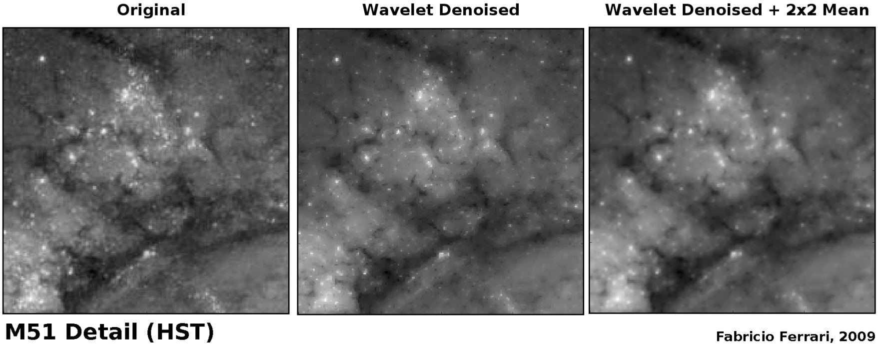
Aplicações (cont.)

- Militar
  - Radar
  - Sonar
  - Criptografia
- Industrial
  - Prospecção de minerais (petróleo)
  - Controle e monitoramento de processos
  - CAD/CAM

Aplicações (cont.)

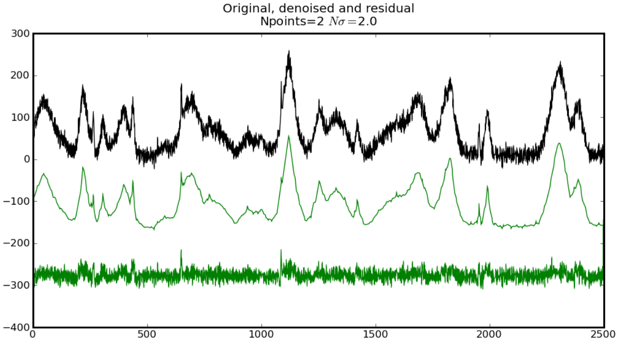
- Militar
  - Radar
  - Sonar
  - Criptografia
- Industrial
  - Prospecção de minerais (petróleo)
  - Controle e monitoramento de processos
  - CAD/CAM
- Científico em Geral
  - Análise de sequências temporais (meteorológicas, bolsa de valores, ciclos naturais, ...)
  - Análise morfológica
  - Supressão de ruído
  - Modelagem e simulação

Aplicações (cont.)



Redução de ruído em imagem com transformada de wavelets

Aplicações (cont.)



Redução de ruído em espectro

Sinal

Sinal:
representação eletrônica de uma medida física.
representação da variação de um parâmetro como função de outros

Sinal

Sinal:

representação eletrônica de uma medida física.

representação da variação de um parâmetro como função de outros

- **sinal analógico:** (contínuo)

  pode conter qualquer valor da grandeza medida

Sinal

Sinal:

representação eletrônica de uma medida física.

representação da variação de um parâmetro como função de outros

- **sinal analógico:** (contínuo)
  pode conter qualquer valor da grandeza medida
- **sinal digital:** (digital=numérico=discreto)
  representação numérica da grandeza medida.

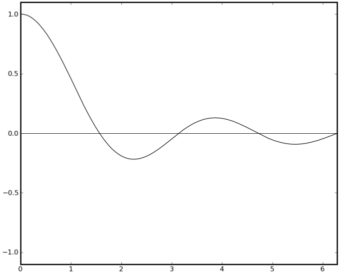
Sinal

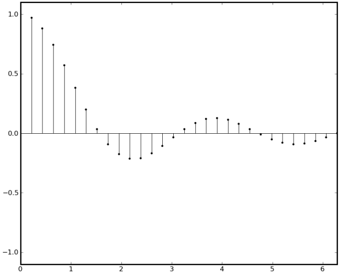
Sinal:

representação eletrônica de uma medida física.

representação da variação de um parâmetro como função de outros

- **sinal analógico:** (contínuo)
  pode conter qualquer valor da grandeza medida
- **sinal digital:** (digital=numérico=discreto)
  representação numérica da grandeza medida.





Sinais Discretos

Um sinal discreto é representado por uma sequência $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ em que uma função contínua $x_c(t)$ é amostrada em intervalos regulares T_a.

Sinais Discretos

Um sinal discreto é representado por uma sequência $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ em que uma função contínua $x_c(t)$ é amostrada em intervalos regulares T_a.

$$\begin{aligned} x[0] &= x_c(0\,T_a) \\ x[1] &= x_c(1\,T_a) \\ x[2] &= x_c(2\,T_a) \\ &\cdots \\ x[n] &= x_c(n\,T_a) \\ &\cdots \end{aligned}$$

Sinais Discretos

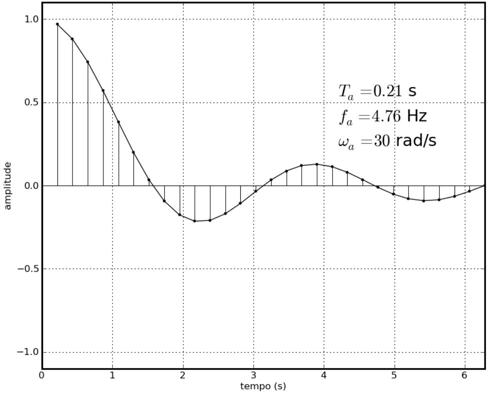
Um sinal discreto é representado por uma sequência $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ em que uma função contínua $x_c(t)$ é amostrada em intervalos regulares T_a.

$$
\begin{aligned}
x[0] &= x_c(0\,T_a) \\
x[1] &= x_c(1\,T_a) \\
x[2] &= x_c(2\,T_a) \\
&\dots \\
x[n] &= x_c(n\,T_a) \\
&\dots
\end{aligned}
$$

n indíce da sequência
$x_c(t)$ função contínua
$x[n]$ é a sequência discreta
T_a é o período de amostragem

Período e Frequências de Amostragem

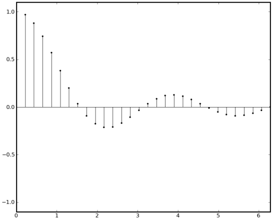
— $x_c(t)$ $\quad\quad$ • $x[n]$



Frequência linear e angular de amostragem

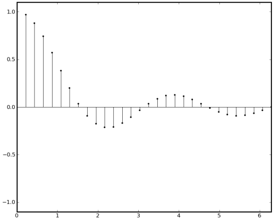
$$f_a = \frac{1}{T_a} \qquad w_a = 2\pi f_a$$

Amostragem e Erros



n	nT_a	$x_c(nT_a)$	x[n]
0	0.000000000000	1.000000000000	1.00
1	0.209439510239	0.968997677924	0.97
2	0.418879020479	0.879438474202	0.88
3	0.628318530718	0.741209763757	0.74
4	0.837758040957	0.569336406508	0.57
5	1.047197551200	0.382019306658	0.38

Amostragem e Erros



n	nT_a	$x_c(nT_a)$	x[n]
0	0.000000000000	1.000000000000	1.00
1	0.209439510239	0.968997677924	0.97
2	0.418879020479	0.879438474202	0.88
3	0.628318530718	0.741209763757	0.74
4	0.837758040957	0.569336406508	0.57
5	1.047197551200	0.382019306658	0.38

Erros de amostragem:

instante da amostra

$$\delta t = t - nT_a$$

intensidade do sinal

$$\delta x = x_c(nT_a) - x[n]$$

Propriedades e Operações

Propriedades e Operações com Sinais Discretos

Algébricas

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x_1[n] + x_2[n], \\
y[n] &= x_1[n] - x_2[n], \\
y[n] &= x_1[n] * x_2[n], \\
y[n] &= \frac{x_1[n]}{x_2[n]}, \quad x_2[n] \neq 0.
\end{aligned}
$$

Propriedades e Operações com Sinais Discretos

Algébricas

$$\begin{aligned} y[n] &= x_1[n] + x_2[n], \\ y[n] &= x_1[n] - x_2[n], \\ y[n] &= x_1[n] * x_2[n], \\ y[n] &= \frac{x_1[n]}{x_2[n]}, \quad x_2[n] \neq 0. \end{aligned}$$

Mudança na escala de Amplitude

$$y[n] = c * x[n], \qquad c \in \mathbb{R}$$

Propriedades e Operações com Sinais Discretos

Algébricas

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x_1[n] + x_2[n], \\
y[n] &= x_1[n] - x_2[n], \\
y[n] &= x_1[n] * x_2[n], \\
y[n] &= \frac{x_1[n]}{x_2[n]}, \qquad x_2[n] \neq 0.
\end{aligned}
$$

Mudança na escala de Amplitude

$$y[n] = c * x[n], \qquad c \in \mathbb{R}$$

Mudança na escala de tempo

$$y[n] = x[Mn], \qquad M \in \mathbb{Z}$$

$M = -1$ reflexão
$|M| > 1$ compressão
$|M| = 1$ identidade
$|M| < 1$ se $n/M \in \mathbb{Z}$, senão 0

Propriedades e Operações com Sinais Discretos

Algébricas

$$\begin{aligned} y[n] &= x_1[n] + x_2[n], \\ y[n] &= x_1[n] - x_2[n], \\ y[n] &= x_1[n] * x_2[n], \\ y[n] &= \frac{x_1[n]}{x_2[n]}, \quad x_2[n] \neq 0. \end{aligned}$$

Mudança na escala de Amplitude

$$y[n] = c * x[n], \qquad c \in \mathbb{R}$$

Mudança na escala de tempo

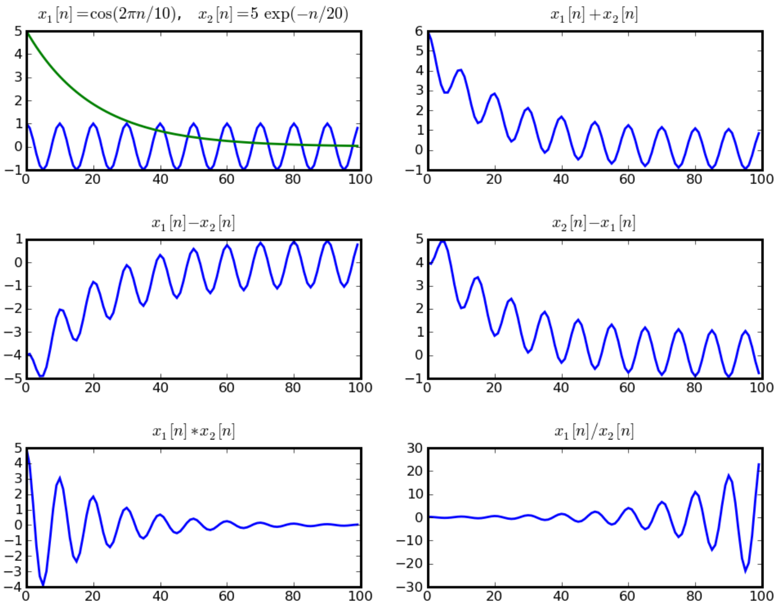
$$y[n] = x[Mn], \qquad M \in \mathbb{Z}$$

$M = -1$ reflexão
$|M| > 1$ compressão
$|M| = 1$ identidade
$|M| < 1$ se $n/M \in \mathbb{Z}$, senão 0

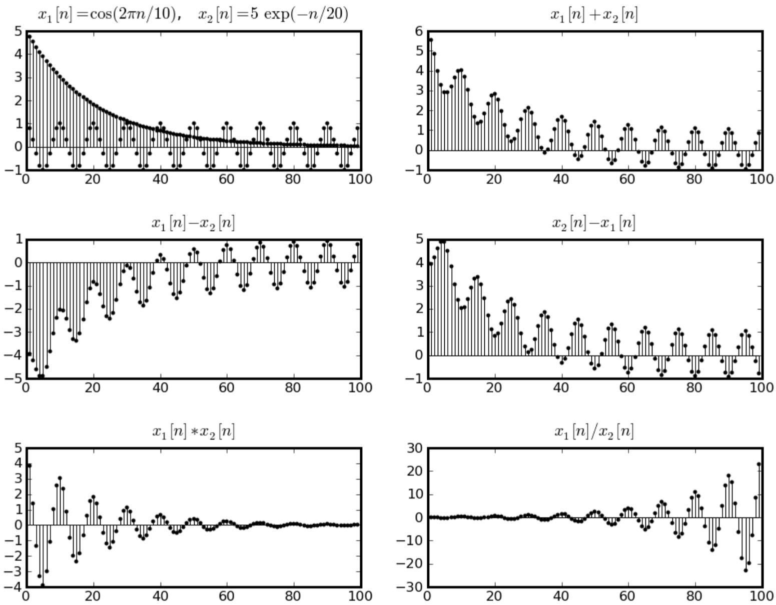
Deslocamento no tempo

$$y[n] = x[n-k], \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo de Operações Algébricas

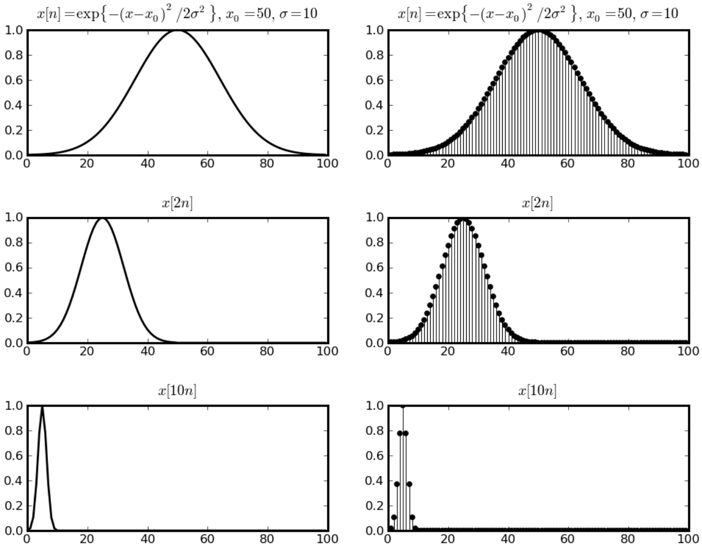


Exemplo de Operações Algébricas (discreto)



Exemplo de Operações no Tempo

Gaussiana $\exp\{\frac{x^2}{2\sigma^2}\}$



Diferenças

primeira diferença

$$\Delta x[n] \quad = \quad x[n] - x[n-1]$$

Diferenças

primeira diferença

$$\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$$

segunda diferença

$$\Delta^2 x[n] = \Delta(\Delta x[n])$$

Diferenças

primeira diferença

$$\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$$

segunda diferença

$$\begin{aligned}
\Delta^2 x[n] &= \Delta(\Delta x[n]) \\
&= \Delta x[n] - \Delta x[n-1] \\
&= (x[n] - x[n-1]) - (x[n-1] - x[n-1-1]) \\
\Delta^2 x[n] &= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]
\end{aligned}$$

Diferenças

primeira diferença

$$\Delta x[n] \quad = \quad x[n] - x[n-1]$$

segunda diferença

$$\begin{aligned}
\Delta^2 x[n] &= \Delta(\Delta x[n]) \\
&= \Delta x[n] - \Delta x[n-1] \\
&= (x[n] - x[n-1]) - (x[n-1] - x[n-1-1]) \\
\Delta^2 x[n] &= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]
\end{aligned}$$

derivadas discretas

$$\frac{dx_c(t)}{dt} \simeq \frac{\Delta x[n]}{\Delta t} = \frac{x[n] - x[n-1]}{T_a}$$

Diferenças

primeira diferença

$$\Delta x[n] \quad = \quad x[n] - x[n-1]$$

segunda diferença

$$\begin{aligned}
\Delta^2 x[n] &= \Delta(\Delta x[n]) \\
&= \Delta x[n] - \Delta x[n-1] \\
&= (x[n] - x[n-1]) - (x[n-1] - x[n-1-1]) \\
\Delta^2 x[n] &= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]
\end{aligned}$$

derivadas discretas

$$\begin{aligned}
\frac{dx_c(t)}{dt} &\simeq \frac{\Delta x[n]}{\Delta t} = \frac{x[n] - x[n-1]}{T_a} \\
\frac{d^2 x_c(t)}{dt^2} &\simeq \frac{\Delta(\Delta x[n])}{\Delta\Delta t} = \frac{x[n] - 2\,x[n-1] - x[n-2]}{T_a}
\end{aligned}$$

Diferenças

primeira diferença

$$\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$$

segunda diferença

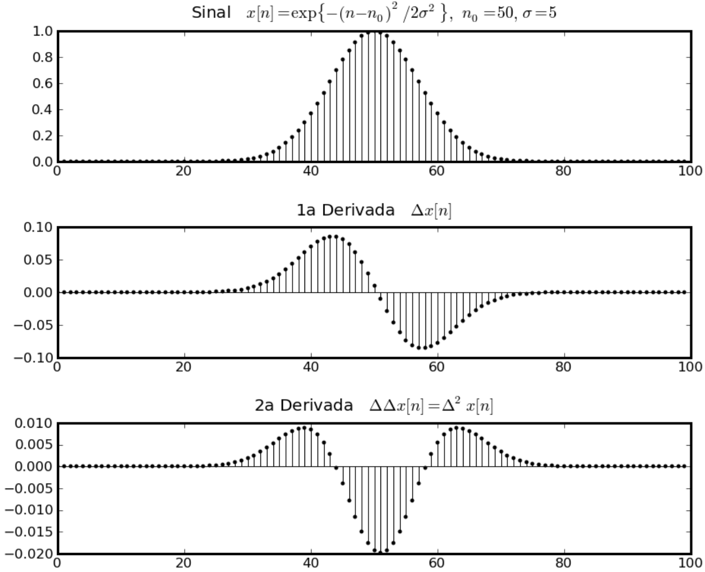
$$\begin{aligned}
\Delta^2 x[n] &= \Delta(\Delta x[n]) \\
&= \Delta x[n] - \Delta x[n-1] \\
&= (x[n] - x[n-1]) - (x[n-1] - x[n-1-1]) \\
\Delta^2 x[n] &= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]
\end{aligned}$$

derivadas discretas

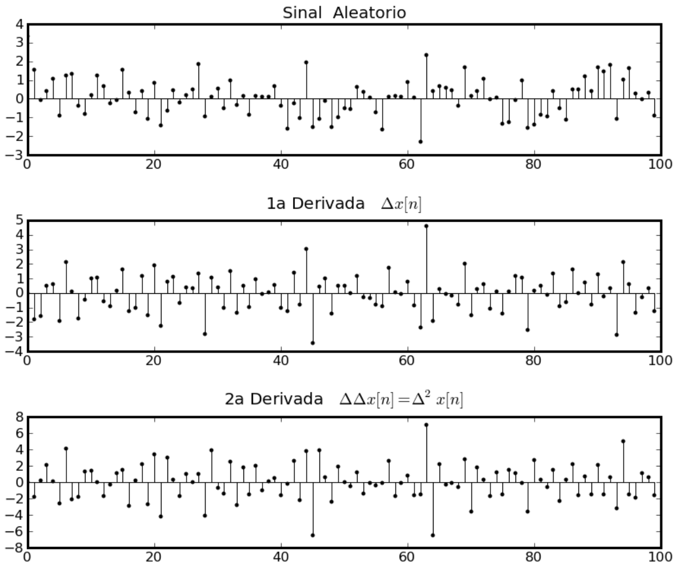
$$\begin{aligned}
\frac{dx_c(t)}{dt} &\simeq \frac{\Delta x[n]}{\Delta t} = \frac{x[n] - x[n-1]}{T_a} \\
\frac{d^2 x_c(t)}{dt^2} &\simeq \frac{\Delta(\Delta x[n])}{\Delta\Delta t} = \frac{x[n] - 2\,x[n-1] - x[n-2]}{T_a}
\end{aligned}$$

Filtros $\quad \Delta = [1, -1] \qquad \Delta^2 = [1, -2, 1]$

Diferenças: exemplo Gaussiana



Diferenças: exemplo ruído



Acumulação

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{m} x[n]$$

Acumulação

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{m} x[n]$$

Acumulação da diferença

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{n} \Delta x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} (x[n] - x[n-1]) = \\
\sum_{k=-\infty}^{n} x[n] - \sum_{k=-\infty}^{n} x[n-1] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[n] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[n] = x[n]. \\
\sum_{k=-\infty}^{n} \Delta x[n] &= x[n]
\end{aligned}$$

Acumulação

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{m} x[n]$$

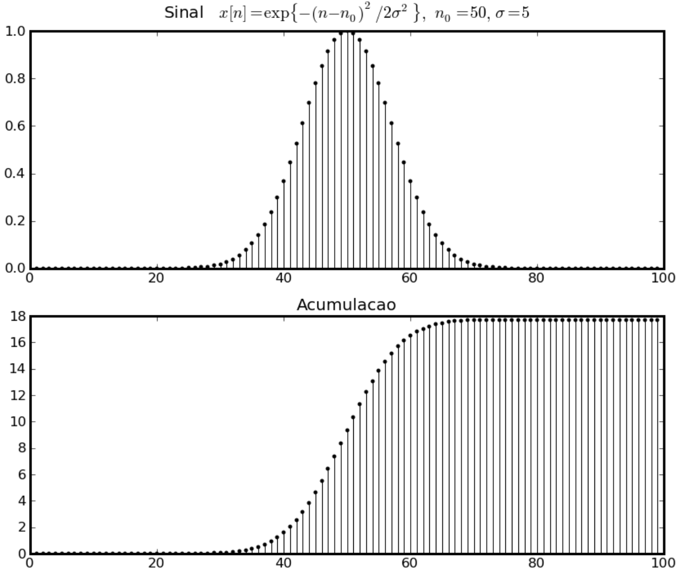
Acumulação da diferença

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{n} \Delta x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} (x[n] - x[n-1]) = \\
\sum_{k=-\infty}^{n} x[n] - \sum_{k=-\infty}^{n} x[n-1] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[n] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[n] = x[n]. \\
\sum_{k=-\infty}^{n} \Delta x[n] &= x[n]
\end{aligned}$$

Integração numérica

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[n] \sim \int_{-\infty}^{t_0} x \; dt$$

Acumulação



Sinal $x[n] = \exp\{-(n-n_0)^2 / 2\sigma^2\}, \; n_0 = 50, \sigma = 5$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
100
Acumulacao
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
20
40
60
80
100

Parte Real e Imaginária

$$x[n] = x_R[n] + \mathbf{i}\ x_I[n]$$

unidade imaginária

$$\mathbf{i} = \sqrt{-1} \qquad \mathbf{i}^2 = -1$$

Parte Real e Imaginária

$$x[n] = x_R[n] + \mathbf{i}\ x_I[n]$$

unidade imaginária

$$\mathbf{i} = \sqrt{-1} \qquad \mathbf{i}^2 = -1$$

complexo conjugado

$$x^*[n] = x_R[n] - \mathbf{i}\ x_I[n]$$

$$\begin{aligned} x_R[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] + x^*[n]\right) \\ x_I[n] &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(x[n] - x^*[n]\right) \end{aligned}$$

Revisão de números complexos:

`http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number`

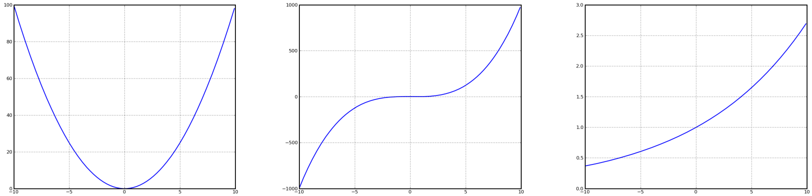
Paridade e simetria

Sequência par (*even*) ou simétrica

$$x[n] = x[-n]$$

Sequência ímpar (*odd*) ou anti-simétrica

$$x[n] = -x[-n]$$



par ímpar sem paridade

Decomposição em parte simétrica e antisimétrica

$$x[n] = x_s[n] + x_a[n]$$

Decomposição em parte simétrica e antisimétrica

$$
\begin{aligned}
x[n] &= x_s[n] + x_a[n] \\
x[-n] &= x_s[-n] + x_a[-n] \\
&= x_s[n] - x_a[n]
\end{aligned}
$$

Decomposição em parte simétrica e antisimétrica

$$\begin{aligned} x[n] &= x_s[n] + x_a[n] \\ x[-n] &= x_s[-n] + x_a[-n] \\ &= x_s[n] - x_a[n] \end{aligned}$$

somando-as ou subtraindo-as

$$x_s[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$$

$$x_a[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

Exemplos de decomposição em parte simétrica e antisimétrica

- $x[n] = 2n$
  $x[-n] = -2n = -x[n]$ anti-simétrica

Exemplos de decomposição em parte simétrica e antisimétrica

- $x[n] = 2n$
  $x[-n] = -2n = -x[n]$ anti-simétrica
- $x[n] = n^2$
  $x[-n] = (-n)^2 = n^2 = x[n]$ simétrica

Exemplos de decomposição em parte simétrica e antisimétrica

- $x[n] = 2n$
  $x[-n] = -2n = -x[n]$ anti-simétrica
- $x[n] = n^2$
  $x[-n] = (-n)^2 = n^2 = x[n]$ simétrica
- $x[n] = n^2 + n$

$$
\begin{aligned}
x_s[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2 + n + (-n)^2 + (-n)\right) = \frac{1}{2}(2n^2) = n^2
\end{aligned}
$$

Exemplos de decomposição em parte simétrica e antisimétrica

- $x[n] = 2n$
  $x[-n] = -2n = -x[n]$ anti-simétrica
- $x[n] = n^2$
  $x[-n] = (-n)^2 = n^2 = x[n]$ simétrica
- $x[n] = n^2 + n$

$$
\begin{aligned}
x_s[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2 + n + (-n)^2 + (-n)\right) = \frac{1}{2}(2n^2) = n^2 \\
x_a[n] &= \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2 + n - (-n)^2 - (-n)\right) = \frac{1}{2}(2n) = n
\end{aligned}
$$

Periodicidade

Uma sequência é periódica se depois de um certo intervalo (período) ela se repete.

$$x[n] = x[n + N]$$

período

$$N \in \mathbb{Z}$$

Periodicidade

Uma sequência é periódica se depois de um certo intervalo (período) ela se repete.

$$x[n] = x[n + N]$$

período

$$N \in \mathbb{Z}$$

frequência

$$f_0 = \frac{1}{N}$$

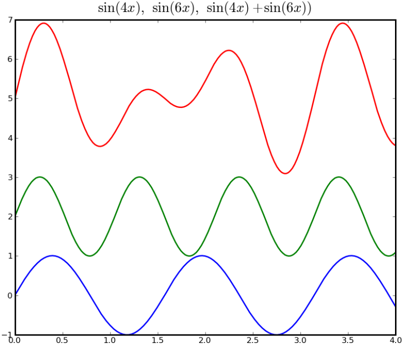
frequência angular

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = 2\pi f_0$$

Período de sinais compostos

$x_1[n]$ tem perído N_1 $x_2[n]$ tem perído N_2

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x_1[n] + x_2[n] \\
y[n + kN] &= x_1[n + k_1 N_1] + x_2[n + k_2 N_2] \\
kN &= k_1 N_1 + k_2 N_2 \\
N &= MMC(N_1, N_2)
\end{aligned}
$$



Energia e Potência

Energia

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_c(t)|^2 \; dt \qquad \text{continuo}$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \qquad \text{discreto}$$

Energia e Potência

Energia

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_c(t)|^2 \; dt \qquad \text{continuo}$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \qquad \text{discreto}$$

Potência

$$\langle P \rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x_c(t)|^2 \; dt = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T} E \qquad \text{continuo}$$

$$P = \frac{dE}{dt} \qquad \text{continuo}$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 \qquad \text{discreto}$$

Sequências Básicas

Impulso Unitário – Função δ

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n-a] = \begin{cases} 1, & n = a \\ 0, & n \neq a \end{cases}$$

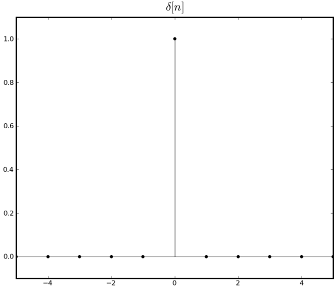
$$a \in \mathbb{Z}$$

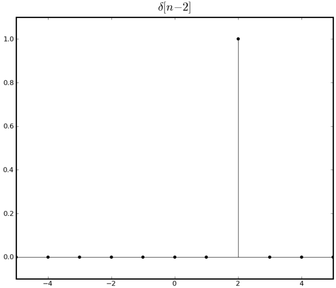
Impulso Unitário – Função δ

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n-a] = \begin{cases} 1, & n = a \\ 0, & n \neq a \end{cases}$$

$$a \in \mathbb{Z}$$





Expansão em termos de δ's

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

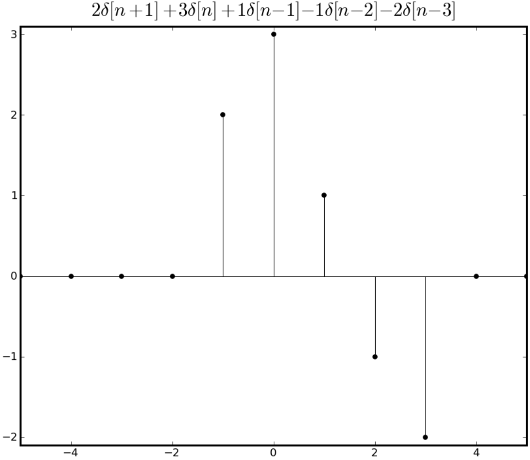
Expansão em termos de δ's

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-a)\ dx = f(a)$$

Expansão em termos de δ's

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-a)\ dx = f(a)$$

Exemplo:



Função Degrau

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$u[n-a] = \begin{cases} 1, & n \geq a \\ 0, & n < a \end{cases}$$

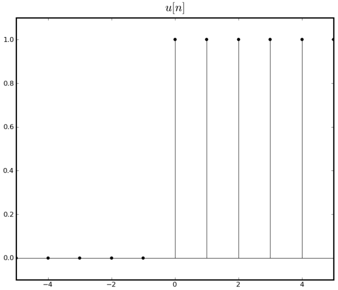
$$a \in \mathbb{Z}$$

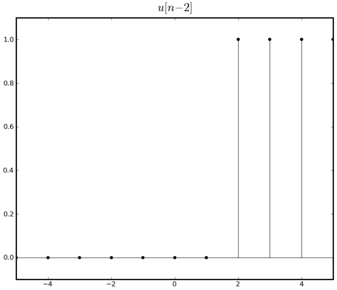
Função Degrau

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$u[n-a] = \begin{cases} 1, & n \geq a \\ 0, & n < a \end{cases}$$

$$a \in \mathbb{Z}$$





Função Degrau

$$
\begin{aligned}
u[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]
\end{aligned}
$$

Função Degrau

$$
\begin{aligned}
u[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta[n] &= u[n] - u[n-1] \\
&= \Delta u[n]
\end{aligned}
$$

Função Degrau

$$
\begin{aligned}
u[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta[n] &= u[n] - u[n-1] \\
&= \Delta u[n]
\end{aligned}
$$

Função $\delta(x)$ de Dirac e Função $H(x)$ de Heaviside
caso contínuo

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx \\
\delta(x) &= \frac{dH(x)}{dx}
\end{aligned}
$$

Sequência Exponencial

$$x[n] = A\ \alpha^n$$

A	amplitude
α	base
n	grau

Sequência Exponencial

$$x[n] = A\,\alpha^n$$

A	amplitude
α	base
n	grau

$\alpha > 1$	crescente
$0 < \alpha < 1$	descrescente
$\alpha < 0$	oscilante
$\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$	estacionária

Sequência Exponencial

$$x[n] = A\,\alpha^n$$

A	amplitude
α	base
n	grau
$\alpha > 1$	crescente
$0 < \alpha < 1$	descrescente
$\alpha < 0$	oscilante
$\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$	estacionária

Caso importante $\alpha = e^{i\omega}$, $A = 1$

$$x[n] = e^{i\omega n} = \cos(\omega n) + i\sin(\omega n)$$

Sequência Senoidal

$$x[n] = A\cos(\omega n + \varphi)$$

Periódica se $x[n] = x[n+N]$

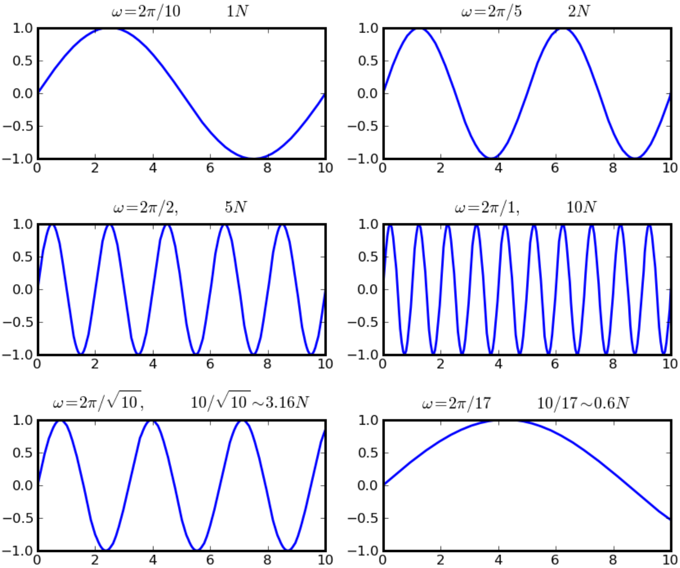
$$x[n+N] = A\cos(\omega n + \omega N)$$

$$\omega N = k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\omega = \frac{2\pi k}{N} \qquad f = \frac{k}{N} = kf_0$$

Sequência Senoidal

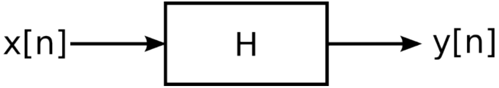
diferentes frequências



Sistemas Discretos e
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LIT)

Sistema Discreto

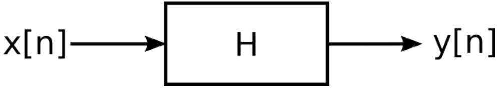
Operador matemático $H\{\cdot\}$ que transforma um sinal em outro por meio de uma sequência fixa de operações



$$y[n] = H\{x[n]\}$$

Sistema Discreto

Operador matemático $H\{\cdot\}$ que transforma um sinal em outro por meio de uma sequência fixa de operações



$$y[n] = H\{x[n]\}$$

Exemplo: acumulador

$$H\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$$

Propriedades dos sistemas discretos

Aditividade:

$$H\{x_1[n] + x_2[n]\} = H\{x_1[n]\} + H\{x_2[n]\}$$

Propriedades dos sistemas discretos

Aditividade:

$$H\{x_1[n] + x_2[n]\} = H\{x_1[n]\} + H\{x_2[n]\}$$

Homogeneidade:

$$H\{c\,x[n]\} = c\,H\{x[n]\}$$

Propriedades dos sistemas discretos

Aditividade:

$$H\{x_1[n] + x_2[n]\} = H\{x_1[n]\} + H\{x_2[n]\}$$

Homogeneidade:

$$H\{c\,x[n]\} = c\,H\{x[n]\}$$

Linearidade (aditividade e homogeneidade)

$$H\{a_1\,x_1[n] + a_2\,x_2[n]\} = a_1\,H\{x_1[n]\} + a_2\,H\{x_2[n]\}$$

Propriedades dos sistemas discretos

Memória:
um sistema é dito sem memória se a saida em $n = n_0$ depende somente da entrada em $n = n_0$

Propriedades dos sistemas discretos

Memória:
um sistema é dito sem memória se a saida em $n = n_0$ depende somente da entrada em $n = n_0$
Exemplos:
sem memória: $y[n] = x^2[n]$, com memória: $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Propriedades dos sistemas discretos

Memória:
um sistema é dito sem memória se a saida em $n = n_0$ depende somente da entrada em $n = n_0$
Exemplos:
sem memória: $y[n] = x^2[n]$, com memória: $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Invariância Temporal: um sistema tem invariância temporal se um deslocamento na entrada produz o mesmo desclocamento na saída

$$y[n] = H\{x[n]\} \qquad \Rightarrow \qquad y[n-n_0] = H\{x[n-n_0]\}$$

Propriedades dos sistemas discretos

Memória:
um sistema é dito sem memória se a saida em $n = n_0$ depende somente da entrada em $n = n_0$
Exemplos:
sem memória: $y[n] = x^2[n]$, com memória: $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Invariância Temporal: um sistema tem invariância temporal se um deslocamento na entrada produz o mesmo desclocamento na saída

$$y[n] = H\{x[n]\} \qquad \Rightarrow \qquad y[n-n_0] = H\{x[n-n_0]\}$$

Causalidade: um sistema é causal se, para um dado n_0, a resposta do sistema em n_0 depende somente de entradas anteriores a n_0

Propriedades dos sistemas discretos

Estabilidade:
um sitema é estável, no sentido entrada limitada, saída limitada (BIBO), se para qualquer entrada limitada a saída é limitada.
$|x[n]| \leq A < \infty \qquad \Rightarrow \qquad |y[n]| \leq B < \infty$

Propriedades dos sistemas discretos

Estabilidade:
um sitema é estável, no sentido entrada limitada, saída limitada (BIBO), se para qualquer entrada limitada a saída é limitada.
$|x[n]| \leq A < \infty \qquad \Rightarrow \qquad |y[n]| \leq B < \infty$

Realimentação:
Um sistema é realimentado se o valor atual do sinal de saída depende de valores passados do próprio sinal de saída.
Exemplo: $y[n] = y[n-1] + x[n]$

Propriedades dos sistemas discretos

Estabilidade:
um sitema é estável, no sentido entrada limitada, saída limitada (BIBO), se para qualquer entrada limitada a saída é limitada.
$|x[n]| \leq A < \infty \qquad \Rightarrow \qquad |y[n]| \leq B < \infty$

Realimentação:
Um sistema é realimentado se o valor atual do sinal de saída depende de valores passados do próprio sinal de saída.
Exemplo: $y[n] = y[n-1] + x[n]$

Invertibilidade:
um sistema é invertível se a entrada do sistema pode ser determinada unicamente a partir da saída.
$y[n] = H\{x[n]\} \qquad \Rightarrow \qquad x[n] = H^{-1}\{y[n]\}$

Resposta ao Impulso

A resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema LIT

$$h[n] = H\{\delta[n]\}$$

Resposta ao Impulso

A resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema LIT

$$\begin{aligned} h[n] &= H\{\delta[n]\} \\ x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \end{aligned}$$

Resposta ao Impulso

A resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema LIT

$$
\begin{aligned}
h[n] &= H\{\delta[n]\} \\
x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \\
y[n] &= H\{x[n]\} = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\}
\end{aligned}
$$

Resposta ao Impulso

A resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema LIT

$$
\begin{aligned}
h[n] &= H\{\delta[n]\} \\
x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \\
y[n] &= H\{x[n]\} = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\} \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\{x[k]\,\delta[n-k]\}
\end{aligned}
$$

Resposta ao Impulso

A resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema LIT

$$
\begin{aligned}
h[n] &= H\{\delta[n]\} \\
x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \\
y[n] &= H\{x[n]\} = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\} \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\{x[k]\,\delta[n-k]\} \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,H\{\delta[n-k]\}
\end{aligned}
$$

Resposta ao Impulso

A resposta ao impulso caracteriza completamente um sistema LIT

$$
\begin{aligned}
h[n] &= H\{\delta[n]\} \\
x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \\
y[n] &= H\{x[n]\} = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\} \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\{x[k]\,\delta[n-k]\} \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,H\{\delta[n-k]\} \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]
\end{aligned}
$$

Convolução

$$x[n] \circledast h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

Convolução

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] \circledast h[n] \\
y[0] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[-k] \\
y[1] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[1-k] \\
y[2] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[2-k] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Convolução – exemplo

$$\begin{aligned} x[n] &= \quad [0, 2, 2, 3, 2, 2, 0] \quad 0 \leq n \leq 6 \\ h[n] &= \quad [1, 1, 1] \quad 0 \leq n \leq 2 \end{aligned}$$

$$y[3] \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[3-k]$$

Convolução – exemplo

$$\begin{aligned} x[n] &= [0,2,2,3,2,2,0] \quad 0 \leq n \leq 6 \\ h[n] &= [1,1,1] \quad 0 \leq n \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[3] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[3-k] \\ y[3] &= x[0]h[3-0] + x[1]h[3-1] + x[2]h[3-2] + x[3]h[3-3] + \\ & \quad x[4]h[3-4] + x[5]h[3-5] + x[6]h[3-6] \end{aligned}$$

Convolução – exemplo

$$\begin{aligned} x[n] &= [0, 2, 2, 3, 2, 2, 0] \quad 0 \leq n \leq 6 \\ h[n] &= [1, 1, 1] \quad 0 \leq n \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[3] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[3-k] \\ y[3] &= x[0]h[3-0] + x[1]h[3-1] + x[2]h[3-2] + x[3]h[3-3] + \\ &\quad x[4]h[3-4] + x[5]h[3-5] + x[6]h[3-6] \\ y[3] &= x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] + \\ &\quad x[4]h[-1] + x[5]h[-2] + x[6]h[-3] \end{aligned}$$

Convolução – exemplo

$$\begin{aligned} x[n] &= [0,2,2,3,2,2,0] & 0 \leq n \leq 6 \\ h[n] &= [1,1,1] & 0 \leq n \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[3] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[3-k] \\ y[3] &= x[0]h[3-0] + x[1]h[3-1] + x[2]h[3-2] + x[3]h[3-3] + \\ &\quad x[4]h[3-4] + x[5]h[3-5] + x[6]h[3-6] \\ y[3] &= x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] + \\ &\quad x[4]h[-1] + x[5]h[-2] + x[6]h[-3] \\ y[3] &= x[1]\mathbf{h[2]} + x[2]\mathbf{h[1]} + x[3]\mathbf{h[0]} \qquad h[n] \text{ refletido} \\ y[3] &= 2*1 + 2*1 + 3*1 = 7 \end{aligned}$$

Convolução – exemplo

$$y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 0 * 1 + 2 * 1 + 2 * 1 = 4$$

Convolução – exemplo

$$
\begin{aligned}
y[2] &= x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 0 * 1 + 2 * 1 + 2 * 1 = 4 \\
y[1] &= x[-1]h[2] + x[0]h[1] + x[1]h[0] = \mathbf{0} * 1 + 0 * 1 + 2 * 1 = 2
\end{aligned}
$$

Convolução – exemplo

$$
\begin{aligned}
y[2] &= x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 0 * 1 + 2 * 1 + 2 * 1 = 4 \\
y[1] &= x[-1]h[2] + x[0]h[1] + x[1]h[0] = \mathbf{0} * 1 + 0 * 1 + 2 * 1 = 2 \\
y[0] &= x[-2]h[2] + x[-1]h[1] + x[0]h[0] = \mathbf{0} * 1 + \mathbf{0} * 1 + 0 * 1 = 0
\end{aligned}
$$

Convolução – exemplo

$$
\begin{aligned}
y[2] &= x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 0*1 + 2*1 + 2*1 = 4 \\
y[1] &= x[-1]h[2] + x[0]h[1] + x[1]h[0] = \mathbf{0}*1 + 0*1 + 2*1 = 2 \\
y[0] &= x[-2]h[2] + x[-1]h[1] + x[0]h[0] = \mathbf{0}*1 + \mathbf{0}*1 + 0*1 = 0 \\
y[4] &= x[2]h[2] + x[3]h[1] + x[4]h[0] = 2*1 + 3*1 + 2*1 = 7 \\
y[5] &= x[3]h[2] + x[4]h[1] + x[5]h[0] = 3*1 + 2*1 + 2*1 = 7 \\
y[6] &= x[4]h[2] + x[5]h[1] + x[6]h[0] = 3*1 + 2*1 + 2*1 = 7
\end{aligned}
$$

Convolução – exemplo

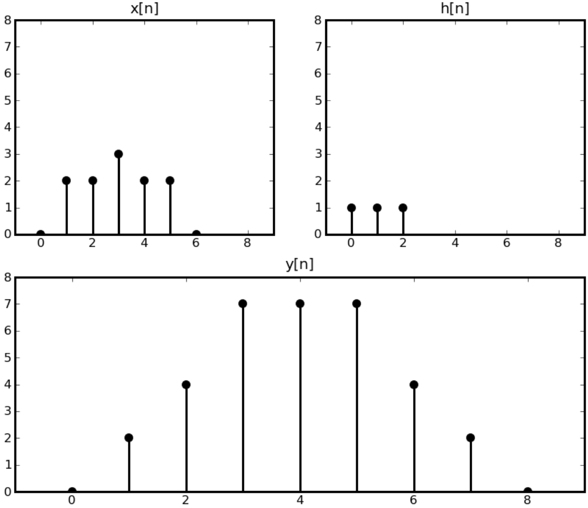
$$
\begin{aligned}
y[2] &= x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 0 * 1 + 2 * 1 + 2 * 1 = 4 \\
y[1] &= x[-1]h[2] + x[0]h[1] + x[1]h[0] = \mathbf{0} * 1 + 0 * 1 + 2 * 1 = 2 \\
y[0] &= x[-2]h[2] + x[-1]h[1] + x[0]h[0] = \mathbf{0} * 1 + \mathbf{0} * 1 + 0 * 1 = 0 \\
y[4] &= x[2]h[2] + x[3]h[1] + x[4]h[0] = 2 * 1 + 3 * 1 + 2 * 1 = 7 \\
y[5] &= x[3]h[2] + x[4]h[1] + x[5]h[0] = 3 * 1 + 2 * 1 + 2 * 1 = 7 \\
y[6] &= x[4]h[2] + x[5]h[1] + x[6]h[0] = 3 * 1 + 2 * 1 + 2 * 1 = 7 \\
y[7] &= x[5]h[2] + x[6]h[1] + x[7]h[0] = 2 * 1 + 0 * 1 + \mathbf{0} * 1 = 2 \\
y[8] &= x[6]h[2] + x[7]h[1] + x[8]h[0] = 0 * 1 + \mathbf{0} * 1 + \mathbf{0} * 1 = 0
\end{aligned}
$$

Convolução – exemplo

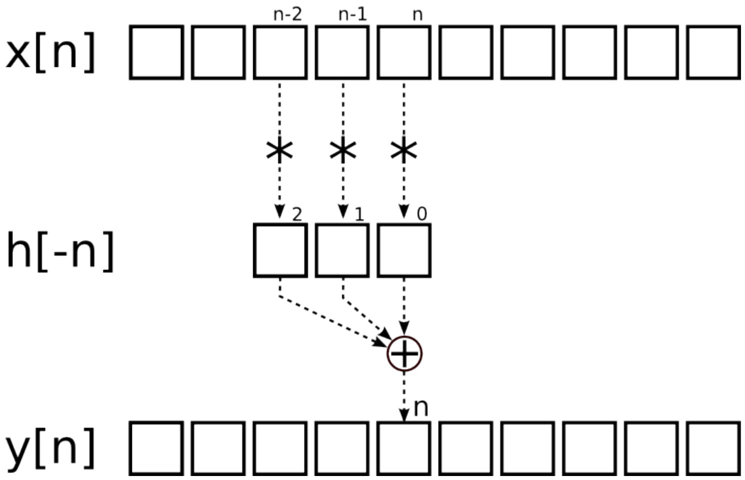
$$
\begin{aligned}
y[2] &= x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 0*1 + 2*1 + 2*1 = 4 \\
y[1] &= x[-1]h[2] + x[0]h[1] + x[1]h[0] = \mathbf{0}*1 + 0*1 + 2*1 = 2 \\
y[0] &= x[-2]h[2] + x[-1]h[1] + x[0]h[0] = \mathbf{0}*1 + \mathbf{0}*1 + 0*1 = 0 \\
y[4] &= x[2]h[2] + x[3]h[1] + x[4]h[0] = 2*1 + 3*1 + 2*1 = 7 \\
y[5] &= x[3]h[2] + x[4]h[1] + x[5]h[0] = 3*1 + 2*1 + 2*1 = 7 \\
y[6] &= x[4]h[2] + x[5]h[1] + x[6]h[0] = 3*1 + 2*1 + 2*1 = 7 \\
y[7] &= x[5]h[2] + x[6]h[1] + x[7]h[0] = 2*1 + 0*1 + \mathbf{0}*1 = 2 \\
y[8] &= x[6]h[2] + x[7]h[1] + x[8]h[0] = 0*1 + \mathbf{0}*1 + \mathbf{0}*1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x[n] &= [0, 2, 2, 3, 2, 2, 0] \\
h[n] &= [1, 1, 1] \\
y[n] = x[n] \circledast h[n] &= [0, 2, 4, 7, 7, 7, 4, 2, 0]
\end{aligned}
$$

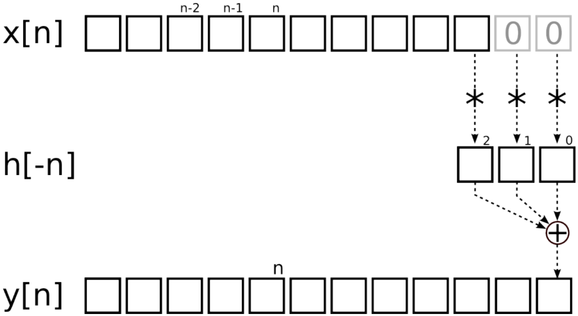
Convolução – exemplo



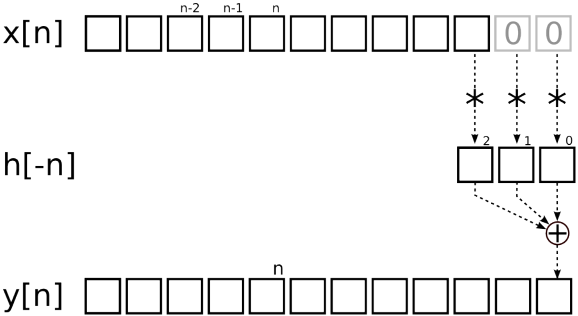
Convolução



Convolução – bordas



Convolução – bordas



$x[n]$	M elementos		
$h[n]$	N elementos		
$y[n]$	caso 1: $M + N - 1$	elementos	**completo**
	caso 2: M	elementos	**mesmo**
	caso 3: $M - N + 1$	elementos	**válidos**

Propriedade LIT e Convolução

Elemento Neutro: $\delta[n]$

$$x[n] \circledast \delta[n] = x[n]$$

Propriedade LIT e Convolução

Elemento Neutro: $\delta[n]$

$$x[n] \circledast \delta[n] = x[n]$$

Comutatividade

$$x[n] \circledast h[n] = h[n] \circledast x[n]$$

Propriedade LIT e Convolução

Elemento Neutro: $\delta[n]$

$$x[n] \circledast \delta[n] = x[n]$$

Comutatividade

$$x[n] \circledast h[n] = h[n] \circledast x[n]$$

Distributividade (paralelismo)

$$x[n] \circledast (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] \circledast h_1[n] + x[n] \circledast h_2[n]$$

Propriedade LIT e Convolução

Elemento Neutro: $\delta[n]$

$$x[n] \circledast \delta[n] = x[n]$$

Comutatividade

$$x[n] \circledast h[n] = h[n] \circledast x[n]$$

Distributividade (paralelismo)

$$x[n] \circledast (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] \circledast h_1[n] + x[n] \circledast h_2[n]$$

Associatividade (cascateamento)

$$x[n] \circledast (h_1[n] \circledast h_2[n]) = (x[n] \circledast h_1[n]) \circledast h_2[n]$$

Propriedade LIT e Convolução

Estabilidade

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Propriedade LIT e Convolução

Estabilidade

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Resposta a Sinais Senoidais $x[n] = e^{i\omega n}$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-i\omega k} \\ y[n] &= H(\omega)\, e^{i\omega n} \end{aligned}$$

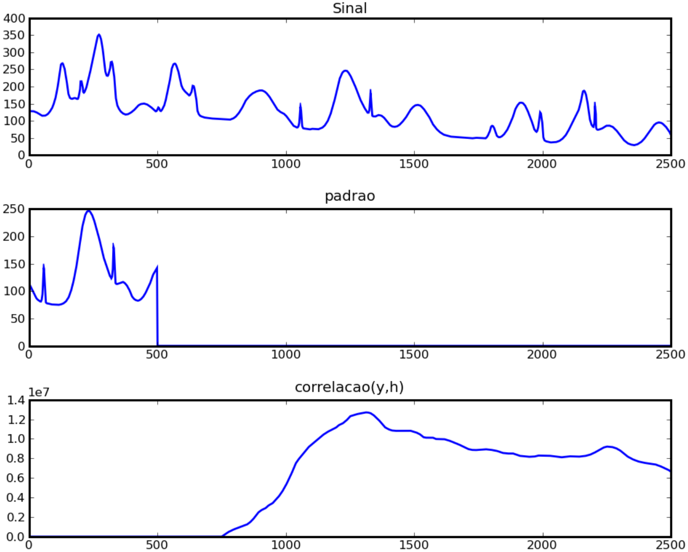
O sinal de saída $y[n]$ tem a mesma frequência ω de $x[n]$, porém com aplitude modulada.
$H(\omega)$ é resposta em frequência do sistema caracterizado por $h[n]$.

Correlação (Cruzada)

$$x[n] \star h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n+k]$$

Correlação – exemplo

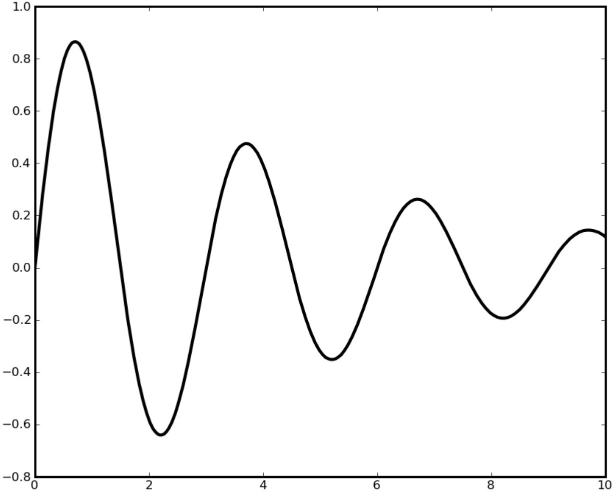
Procura de padrões em sinais



Conversão Analógica Digital

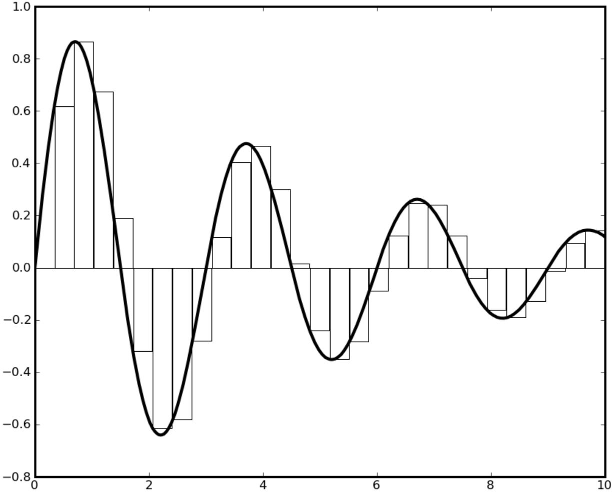
Conversão AD

Sinal Original



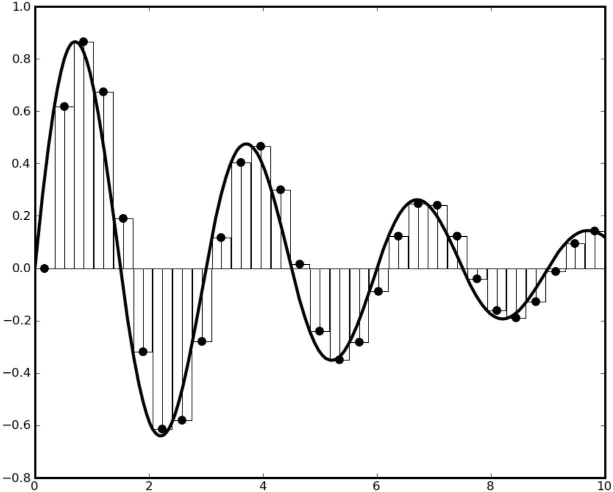
Conversão AD

Sample and Hold



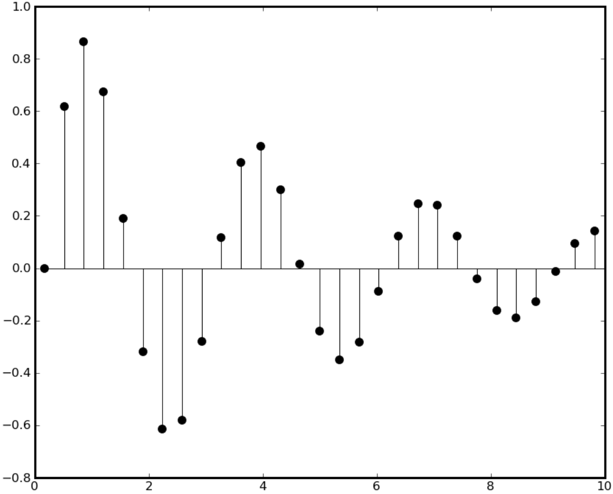
Conversão AD

Digitaliza



Conversão AD

Sinal Digitalizado



Amostragem

Frequência de Amostragem f_a: taxa em que os sinais analógicos são amostrados e convertidos em sinais digitais.
$\text{amostra}/\text{s} = 1/\text{s} = \text{Hz}$

Amostragem

Frequência de Amostragem f_a: taxa em que os sinais analógicos são amostrados e convertidos em sinais digitais.
amostra/s = 1/s = Hz
Período de Amostragem T_a: intervalo de tempo entre uma amostragem e outra.

$$T_a = \frac{1}{f_a}$$

Amostragem

Frequência de Amostragem f_a: taxa em que os sinais analógicos são amostrados e convertidos em sinais digitais.
amostra/s $= 1/\text{s} = \text{Hz}$
Período de Amostragem T_a: intervalo de tempo entre uma amostragem e outra.

$$T_a = \frac{1}{f_a}$$

Níveis de Quantização: niveis discretos N disponíveis para representar o sinal, em geral num sistema de b bits

$$N = 2^b$$

Exemplo de Digitalização e Amostragem

Exemplo: Sinal analógico que varia entre 0 e 5 volts, amostrado com frequência $f_a = 1000$ Hz e armazenado com 8 bits.

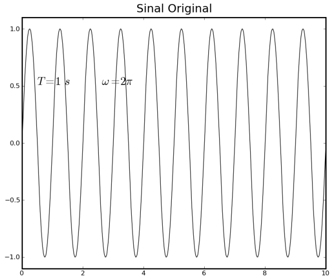
RESOLUÇÃO TEMPORAL:
$T_a = \frac{1}{f_z} = 10^{-3}\, s = 1ms$
amostras em intervalos de 1 ms.

RESOLUÇÃO DE NÍVEIS:
$2^8 = 256$ níveis diferentes,
$(5 - 0)$ Volts/256 níveis $= 0.0195$ V/nível $= 19.5$ mV/nível

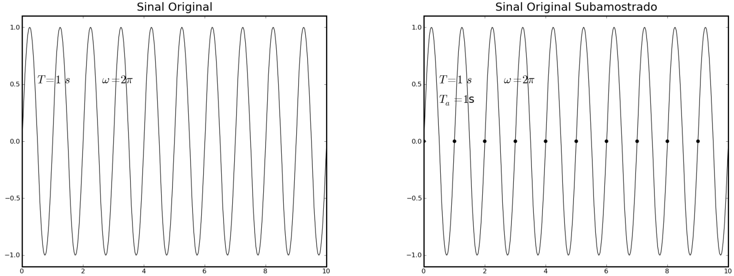
```
1   -  0.0 mV
2   - 19.5 mV
3   - 39.0 mV
4   - 58.5 mV
...
255 - 5000 mV = 5 V
```

ERRO DE AMOSTRAGEM: $\frac{1}{2}$ bit menos significativo

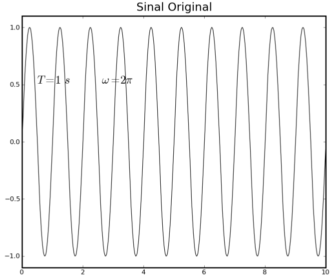
Aliasing e Teorema da Amostragem

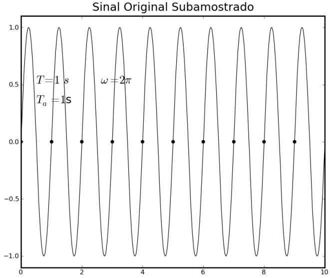


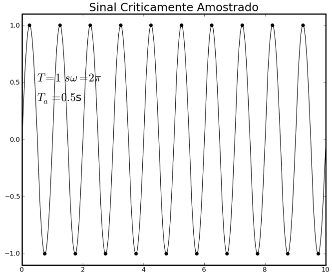
Aliasing e Teorema da Amostragem



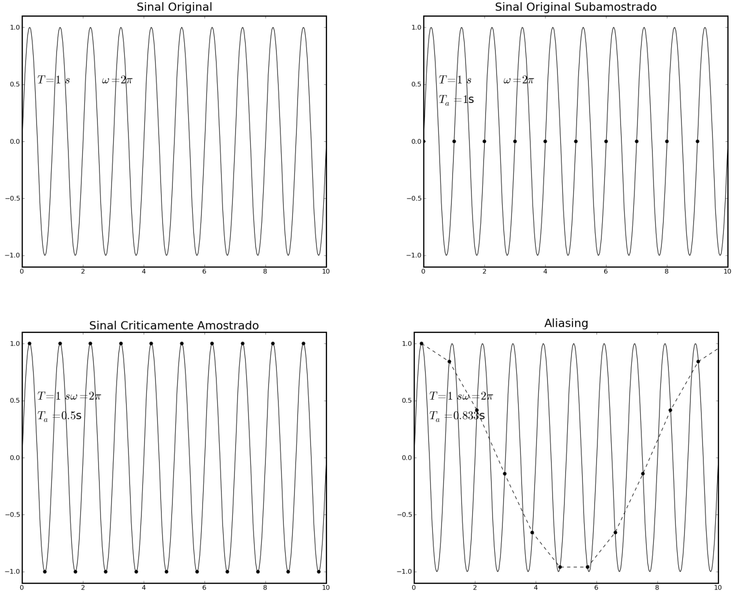
Aliasing e Teorema da Amostragem







Aliasing e Teorema da Amostragem



Teorema da Amostragem

Nyquist-Shannon

Para que um sinal seja corretamente amostrado, a frequência de amostragem deve ser o dobro da frequência mais alta presente no sinal.

Teorema da Amostragem

Nyquist-Shannon

Para que um sinal seja corretamente amostrado, a frequência de amostragem deve ser o dobro da frequência mais alta presente no sinal.

Espectro do Sinal:

$$X(f) = 0 \qquad \text{para} \;\; f > f_c$$

Frequência de Nyquist

$$f_N = 2f_c$$

Estatística de Sinais

Média μ, Variância σ^2 e Desvio Padrão σ

sinal $x[n] = [x_0, \ldots, x_{N-1}]$

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i \\
\sigma^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i - \mu)^2
\end{aligned}$$

Média μ, Variância σ^2 e Desvio Padrão σ

sinal $x[n] = [x_0, \ldots, x_{N-1}]$

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu)^2$$

Razão Sinal-Ruído

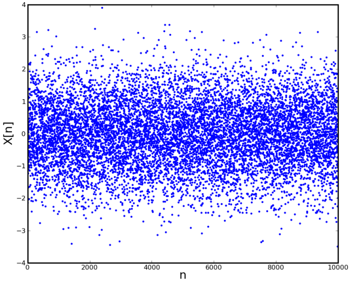
$$SNR = \frac{\mu}{\sigma}$$

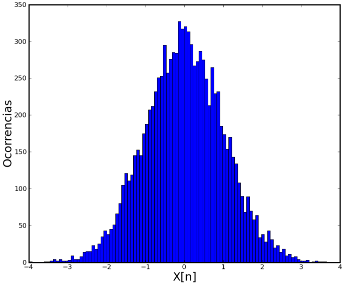
$$SNR = 10\log_{10}\left(\frac{P_{\text{sinal}}}{P_{\text{ruido}}}\right)$$

$$SNR = 20\log_{10}\left(\frac{A_{\text{sinal}}}{A_{\text{ruido}}}\right)$$

Histogramas

Gráfico da distribuição de valores; número de ocorrências para cada valor ou intervalo de possíveis valores





Histogramas

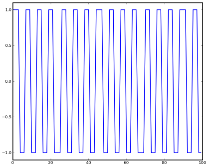
Histograma H_i, $i = 0, \ldots, M-1$ $\qquad$ M possíveis valores

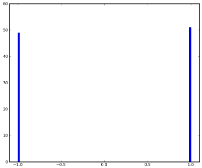
$$
\begin{aligned}
N &= \sum_{i=0}^{M-1} H_i \\
\mu &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{M-1} i\, H_i \\
\sigma^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} (i-\mu)^2\, H_i
\end{aligned}
$$

Função de Distribuição de Probabilidade (PDF)

Histograma normalizado; informa a probabilidade de ocorrência de um valor.

Ex: Onda quadrada

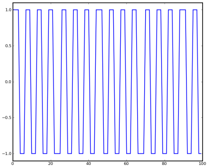


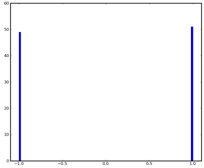


Função de Distribuição de Probabilidade (PDF)

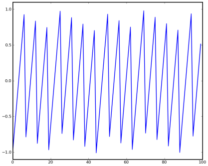
Histograma normalizado; informa a probabilidade de ocorrência de um valor.

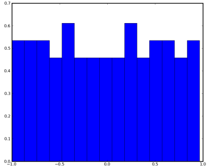
Ex: Onda quadrada





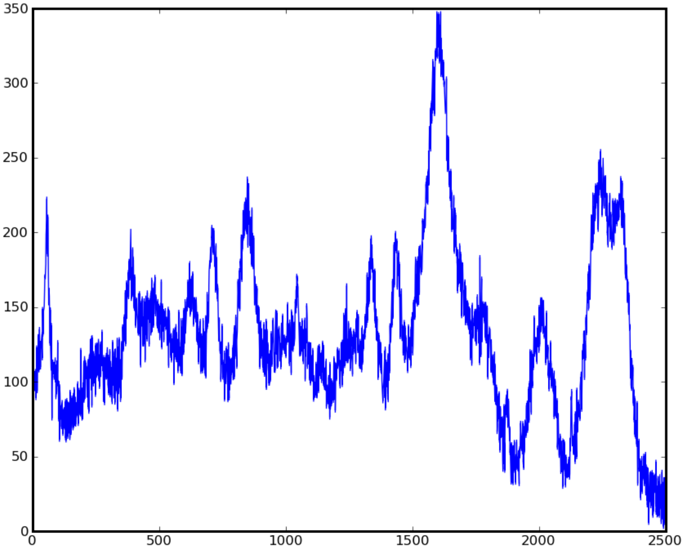
Ex: Onda dente de serra





Exemplos

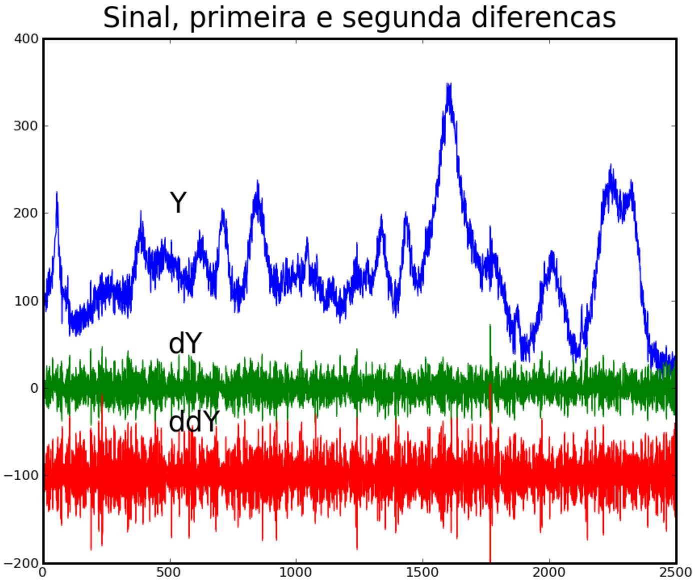
Espectro sintético de gaussianas com ruído



Diferenças

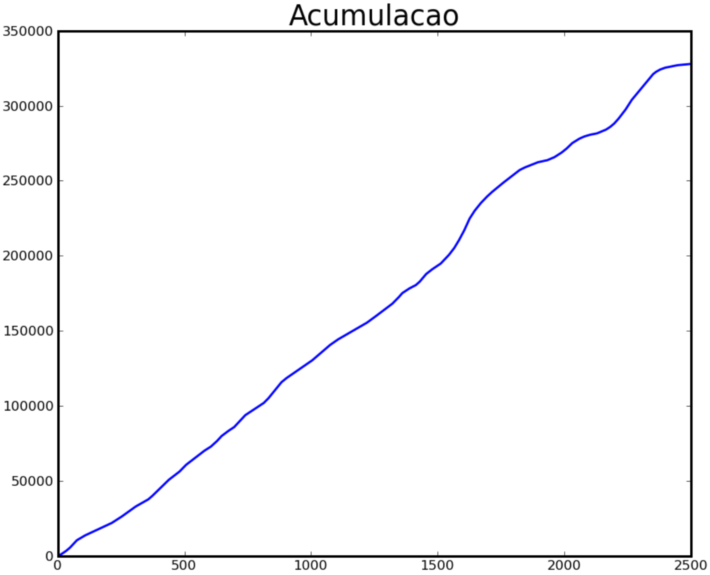
```
# ipython
import pylab
D = pylab.loadtxt('spec-random-gaussians-noise.dat')
x = D[:,0]
y = D[:,1]
dy = pylab.zeros_like(y)
ddy = pylab.zeros_like(y)
sumy = pylab.zeros_like(y)
for i in range(2,len(y)):
    dy[i] = y[i] - y[i-1]
    ddy[i] = y[i] - 2*y[i-1] + y[i-2]
    sumy[i] = sumy[i-1] + y[i]
pylab.plot(y, lw=1)
pylab.plot(dy, lw=1)
pylab.plot(ddy-100, lw=1)
pylab.ylim(-200,400)
pylab.text( 500, 200, 'Y', fontsize=25)
pylab.text( 500, 40, 'dY', fontsize=25)
pylab.text( 500, -50, 'ddY', fontsize=25)
pylab.title('Sinal, primeira e segunda diferencas', fontsize=25)
pylab.savefig('exemplo-diferencas.png')
```

Diferenças



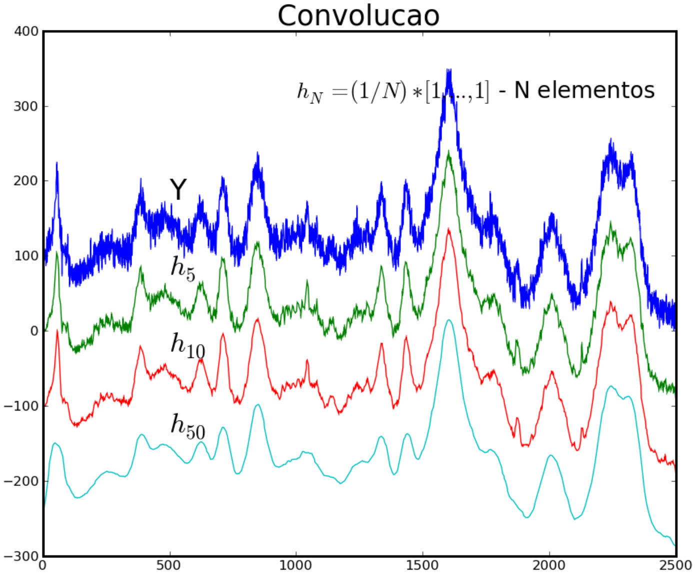
Sinal, primeira e segunda diferencas
Y
dY
ddY
400
300
200
100
0
−100
−200
0
500
1000
1500
2000
2500

Acumulação

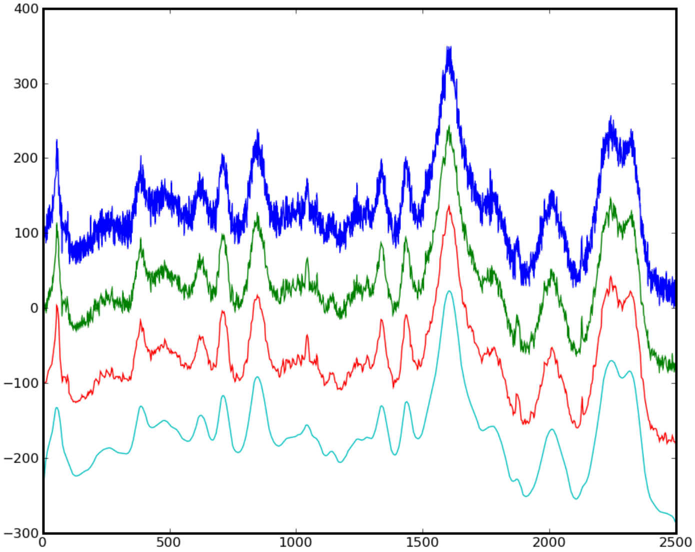


Acumulacao
350000
300000
250000
200000
150000
100000
50000
0
0
500
1000
1500
2000
2500

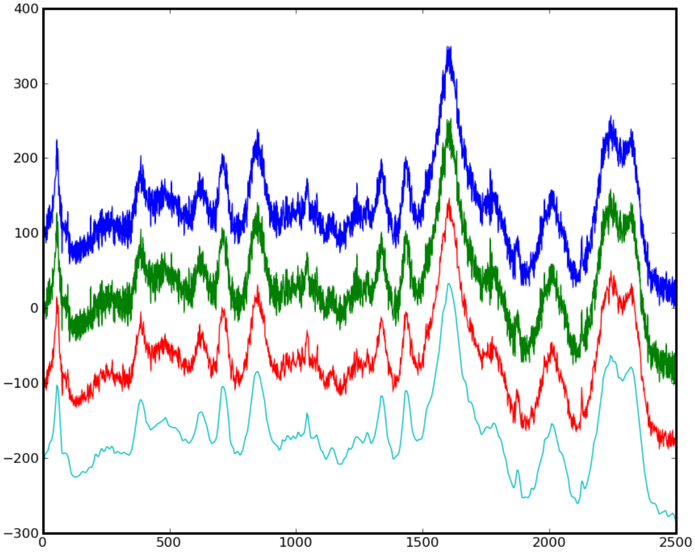
Convolução – médias móveis



Convolução – filtro Hamming



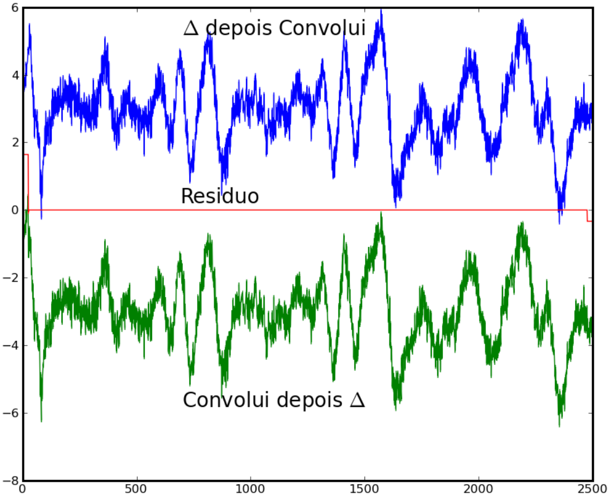
Convolução – filtro FlatTop



Sistemas Lineares

Δ e $\circledast$ são operações lineares

Linearidade: aditividade, homogeneidade



FIM